**Уважаемые обучающиеся 35 группы!**

Используйте учебник А.Н.Колмогоров «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс, 2008 г.

**Тема: «Критические точки »**

Вам предстоит выполнить в рабочей тетради к **следующему уроку конспект**

§6,п.23 (стр 147)

**выписываем** - определение критических точек.

Решаем №288.

**Тема: «Возрастание и убывание функции, точки экстремума»**

Вам предстоит выполнить в рабочей тетради к **следующему уроку**  конспект по данной теме (§6, п.22, п.23)

Вспомогательные вопросы для составления конспекта:

1. Сформулируйте признак возрастания, убывания функции.
2. Сформулируйте признак максимума, минимума функции (упрощенную формулировку).
3. Сделайте соответствующие чертежи.
4. Решаем №290 находим одновременно и промежутки возрастания и убывания, и точки экстремума.
5. Выписать образцы решения (см ниже)

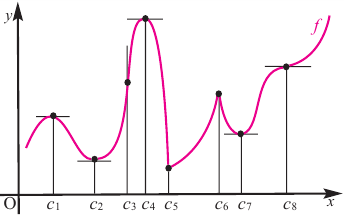
*Справочная информация в помощь*

## Критические точки и экстремумы функции

В некоторых точках из области определения производная функции может быть равна нулю или вообще может не существовать. Такие точки из области определения называются **критическими точками** функции. Покажем критические точки на графике заданной функции.

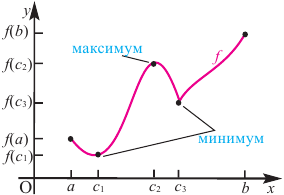
1. Для значений Критические точки и экстремумы функции равных Критические точки и экстремумы функцииКритические точки и экстремумы функции угловой коэффициент касательной к графику равен 0. Т.e. Критические точки и экстремумы функции. Эти точки являются критическими точками функции.

2. В точках Критические точки и экстремумы функции функция не имеет производной. Эти тоже критические точки функции.



3. Для рассматриваемой нами функции критические точки Критические точки и экстремумы функцииКритические точки и экстремумы функции делят ее область определения на чередующиеся интервалы возрастания и убывания. Точки Критические точки и экстремумы функции- критические точки, которые не изменяют возрастание и убывание (или наоборот).

По графику видно, что в точках внутреннего экстремума Критические точки и экстремумы функции производная функции равна нулю, а в точке Критические точки и экстремумы функции производная не существует. Точки, в которых производная функции равна нулю, также называются **стационарными точками**.

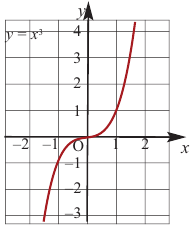


### Теорема Ферма (Необходимое условие существовании экстремумов)

Во внутренних точках экстремума производная либо равна нулю, либо не существует.

**Примечание.** Точка, в которой производная равна нулю, может и не быть точкой экстремума. Например, в точке Критические точки и экстремумы функции производная функции Критические точки и экстремумы функции равна нулю, но эта точка не является ни точкой максимума, ни точкой минимума.

На отрезке непрерывности функция может иметь несколько критических точек, точек максимума и минимума. Существование экстремума в точке зависит от значения функции в данной точке и в точках, близких к данной, т.е. имеет смысл локального (местного) значения. Поэтому иногда используют термин локальный максимум и локальный минимум.

### Достаточное условие существования экстремума

Пусть функция Критические точки и экстремумы функции непрерывна на промежутке Критические точки и экстремумы функции и Критические точки и экстремумы функции. Если Критические точки и экстремумы функции является критической точкой, в окрестности которой функция дифференцируема, то, если в этой окрестности:

1 ) Критические точки и экстремумы функции слева от точки Критические точки и экстремумы функции положительна, а справа - отрицательна, то точка Критические точки и экстремумы функции является точкой максимума.

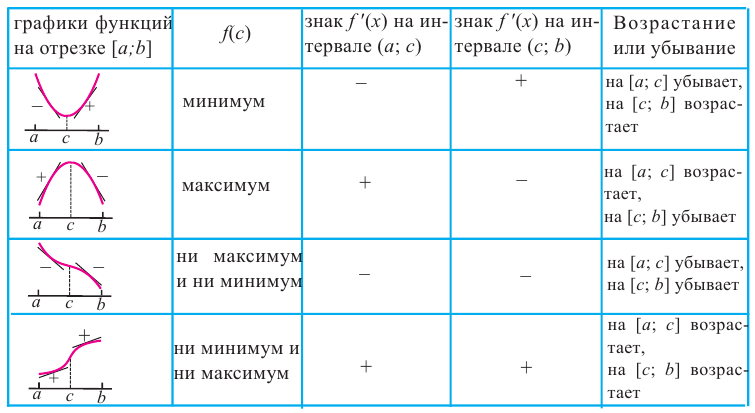
2) Критические точки и экстремумы функции слева от Критические точки и экстремумы функции отрицательна, а справа - положительна, то точка Критические точки и экстремумы функции является точкой минимума

3) Критические точки и экстремумы функции с каждой стороны от точки Критические точки и экстремумы функции имеет одинаковые знаки, то точка Критические точки и экстремумы функции не является точкой экстремума.

Чтобы найти наибольшее (абсолютный максимум) или наименьшее (абсолютный минимум) значение функции, имеющей конечное число критических точек на отрезке, надо найти значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее.

Соответствующие наибольшее и наименьшее значения функции Критические точки и экстремумы функции на отрезке Критические точки и экстремумы функции записываются как Критические точки и экстремумы функции и Критические точки и экстремумы функции.

Ниже представлены примеры определения максимума и минимума в соответствии со знаком производной первого порядка.



### Задача пример №117

Для функции Критические точки и экстремумы функции определите максимумы и минимумы и схематично изобразите график.

**Решение:**

Для решения задания сначала надо найти критические точки. Для данной функции этими точками являются точки (стационарные), в которых производная равна нулю.

1. Производная функции: Критические точки и экстремумы функции

2. Критические точки функции: Критические точки и экстремумы функции

3. Точки Критические точки и экстремумы функции и Критические точки и экстремумы функции разбивают область определения функции на три промежутка.

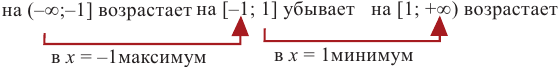
Проверим знак Критические точки и экстремумы функции на интервалах, выбрав пробные точки:

Критические точки и экстремумы функции для интервала Критические точки и экстремумы функции

Критические точки и экстремумы функции для интервала Критические точки и экстремумы функции

Критические точки и экстремумы функции для интервала Критические точки и экстремумы функции

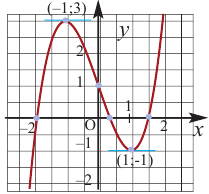
Интервал Критические точки и экстремумы функции Пробные точки Критические точки и экстремумы функции

Знак Критические точки и экстремумы функции Критические точки и экстремумы функции Возрастание и убывание 

При Критические точки и экстремумы функции имеем Критические точки и экстремумы функции. (-1;3) - максимум

При Критические точки и экстремумы функции имеем Критические точки и экстремумы функции (1;-1) - минимум

4. Используя полученные для функции Критические точки и экстремумы функции данные и найдя координаты нескольких дополнительных точек, построим график функции.

**Достаточные условия возрастания и убывания функции.**

На основании достаточных условий (признаков) возрастания и убывания функции находятся промежутки возрастания и убывания функции.

Вот формулировки признаков возрастания и убывания функции на интервале:

* если производная функции *y=f(x)* положительна для любого *x* из интервала *X*, то функция возрастает на *X*;
* если производная функции *y=f(x)* отрицательна для любого *x* из интервала *X*, то функция убывает на *X*.

Таким образом, чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

* найти область определения функции;
* найти производную функции;
* решить неравенства формула и формула на области определения;
* к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.

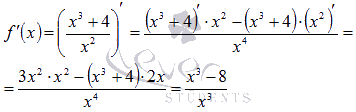
Рассмотрим пример нахождения промежутков возрастания и убывания функции для разъяснения алгоритма.

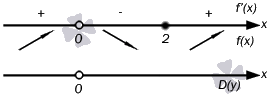
*Пример.*

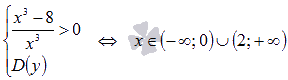
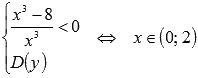
Найти промежутки возрастания и убывания функции формула.

*Решение.*

На первом шаге нужно [найти область определения функции](http://www.cleverstudents.ru/functions/finding_domain_of_function.html). В нашем примере выражение в знаменателе не должно обращаться в ноль, следовательно, формула.

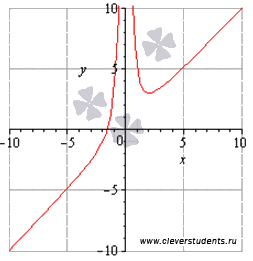
Переходим к нахождению производной функции:  


Для определения промежутков возрастания и убывания функции по достаточному признаку решаем неравенства формула и формула на области определения. Воспользуемся обобщением метода интервалов. Единственным действительным корнем числителя является *x = 2*, а знаменатель обращается в ноль при *x=0*. Эти точки разбивают область определения на интервалы, в которых производная функции сохраняет знак. Отметим эти точки на числовой прямой. Плюсами и минусами условно обозначим интервалы, на которых производная положительна или отрицательна. Стрелочки снизу схематично показывают возрастание или убывание функции на соответствующем интервале.  


Таким образом,  и .

В точке *x=2* функция определена и непрерывна, поэтому ее следует добавить и к промежутку возрастания и к промежутку убывания. В точке *x=0* функция не определена, поэтому эту точку не включаем в искомые интервалы.

Приводим график функции для сопоставления с ним полученных результатов.



*Ответ:*

функция возрастает при формула, убывает на интервале *(0;2]*.

**Пример 1.**Найти промежутки возрастания и убывания функции https://function-x.ru/chapter6-4/r056.gif

Решение. Находим производную функции:

https://function-x.ru/chapter6-4/r057.gif

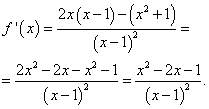
(Для разложения квадратного двухчлена на множители решали [**квадратное уравнение**](https://function-x.ru/sq_equations.html)).

Для отыкания промежутков возрастания и убывания функции найдём точки, в которых https://function-x.ru/chapter6-4/r050.gif. Такими точками являются https://function-x.ru/chapter6-4/r058.gif и https://function-x.ru/chapter6-4/r059.gif.

Исследуем знаки производной в промежутках, ограниченных этими точками. От https://function-x.ru/chapter6-4/r060.gif до точки https://function-x.ru/chapter6-4/r058.gif знак положителен, от точки https://function-x.ru/chapter6-4/r058.gif до точки https://function-x.ru/chapter6-4/r059.gif знак отрицателен, от точки https://function-x.ru/chapter6-4/r059.gif до https://function-x.ru/chapter6-4/r061.gif знак положителен. Ответ на вопрос задания: промежутки возрастания данной функции - https://function-x.ru/chapter6-4/r062.gif и https://function-x.ru/chapter6-4/r063.gif, а промежуток убывания функции - https://function-x.ru/chapter6-4/r064.gif.

**Пример 2.**Найти промежутки возрастания и убывания функции https://function-x.ru/chapter6-4/r065.gif.

Решение. Находим производную функции:



Решая уравнение https://function-x.ru/chapter6-4/r067.gif, получаем точки, в которых производная функции равна нулю:

https://function-x.ru/chapter6-4/r068.gif.

Исследуем знаки производной. От https://function-x.ru/chapter6-4/r060.gif до точки https://function-x.ru/chapter6-4/r069.gif знак положителен, от точки https://function-x.ru/chapter6-4/r069.gif до точки https://function-x.ru/chapter6-4/r070.gif знак отрицателен, от точки https://function-x.ru/chapter6-4/r070.gif до https://function-x.ru/chapter6-4/r061.gif знак положителен. Наше исследование показало, что промежутки возрастания данной функции https://function-x.ru/chapter6-4/r071.gif и https://function-x.ru/chapter6-4/r072.gif, а промежуток убывания - https://function-x.ru/chapter6-4/r073.gif

Для самопроверки при расчётах можно воспользоваться **[онлайн калькулятором производных](https://function-x.ru/deriv_calculator.html" \t "_blank)**.

**Пример**

Найти промежутки возрастания и убывания функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284905/720c3f10_8552_0133_7a65_12313c0dade2.png.

**Решение**

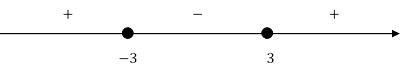
Область определения функции: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284906/72e6f4a0_8552_0133_7a66_12313c0dade2.png. Найдем производную заданной функции: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284907/73fc1fc0_8552_0133_7a67_12313c0dade2.png. Теперь найдем критические точки, то есть точки, в которых производная равна 0 или не определена. Область определения функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284908/74dad370_8552_0133_7a68_12313c0dade2.png не ограничена, поэтому перейдем к поиску точек, в которых она равна нулю.

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284909/75c47540_8552_0133_7a69_12313c0dade2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284910/769bbe10_8552_0133_7a6a_12313c0dade2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284911/77b07580_8552_0133_7a6b_12313c0dade2.png

Критические точки разбивают область определения производной на три промежутка, найдем ее знак на каждом промежутке.



Функция возрастает на тех промежутках, на которых ее производная неотрицательна, то есть https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284905/720c3f10_8552_0133_7a65_12313c0dade2.png возрастает на промежутках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284913/79810310_8552_0133_7a6d_12313c0dade2.png.

Функция убывает на тех промежутках, на которых ее производная неположительная, то есть https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284905/720c3f10_8552_0133_7a65_12313c0dade2.png убывает на промежутке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284914/7a6815a0_8552_0133_7a6e_12313c0dade2.png.

**Пример**

Найти промежутки возрастания и убывания функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284915/7b8832a0_8552_0133_7a6f_12313c0dade2.png.

**Решение**

Область определения функции: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284916/7c7a6a70_8552_0133_7a70_12313c0dade2.png.

Найдем производную заданной функции: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284917/7d5ecfc0_8552_0133_7a71_12313c0dade2.png.

Теперь найдем критические точки, то есть точки, в которых производная равна 0 или не определена. Функция https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284918/7e5174d0_8552_0133_7a72_12313c0dade2.png не определена в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284919/7f6cc300_8552_0133_7a73_12313c0dade2.png.

Теперь найдем нули функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284918/7e5174d0_8552_0133_7a72_12313c0dade2.png.

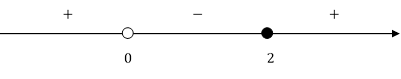
https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284920/804c1f50_8552_0133_7a74_12313c0dade2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284921/8126f8c0_8552_0133_7a75_12313c0dade2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284922/8245ee30_8552_0133_7a76_12313c0dade2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284923/83309680_8552_0133_7a77_12313c0dade2.png

Критические точки разбивают область определения производной на три промежутка, найдем ее знак на каждом промежутке.



https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284915/7b8832a0_8552_0133_7a6f_12313c0dade2.png возрастает на промежутках https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284925/84e89dc0_8552_0133_7a79_12313c0dade2.png.

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284926/860193b0_8552_0133_7a7a_12313c0dade2.png убывает на промежутке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/284927/86e280e0_8552_0133_7a7b_12313c0dade2.png.

Для решения рассмотренных примеров необходимо следующее.

**Уметь**

* Находить производную функции.
* Решать неравенства методом интервалов.

**Понимать**

Функция возрастает в тех точках, в которых производная положительна, и убывает в тех точках, в которых производная отрицательна.

[Экстремумы функции. Нахождение максимума/минимума](https://interneturok.ru/lesson/repetitorskiy-proekt/prakticheskie-zanyatiya-po-podgotovke-k-ege-po-matematike/tema-4-pokazatelnye-i-logarifmicheskie-funktsii-trigonometriya/ekstremalnye-zadachi-nahozhdenie-ekstremumov-funktsii-na-osi-i-na-otrezke#mediaplayer)

## Достаточные условия экстремума функции.

Для нахождения максимумов и минимумов функции можно пользоваться любым из трех признаков экстремума, конечно, если функция удовлетворяет их условиям. Самым распространенным и удобным является первый из них.

### Первое достаточное условие экстремума.

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема в формула-окрестности точки формула, а в самой точке формула непрерывна.

Тогда

* если формула при формула и формула при формула, то формула - точка максимума;
* если формула при формула и формула при формула, то формула - точка минимума.

Другими словами:

* если в точке формула функция непрерывна и в ней производная меняет знак с плюса на минус, то формула - точка максимума;
* если в точке формула функция непрерывна и в ней производная меняет знак с минуса на плюс, то формула - точка минимума.

**Алгоритм нахождения точек экстремума по первому признаку экстремума функции.**

* Находим область определения функции.
* Находим производную функции на области определения.
* Определяем нули числителя, нули знаменателя производной и точки области определения, в которых производная не существует (все перечисленные точки называют *точками возможного экстремума*, проходя через эти точки, производная как раз может изменять свой знак).
* Эти точки разбивают область определения функции на промежутки, в которых производная сохраняет знак. Определяем знаки производной на каждом из интервалов (например, вычисляя значение производной функции в любой точке отдельно взятого интервала).
* Выбираем точки, в которых функция непрерывна и, проходя через которые, производная меняет знак - они и являются точками экстремума.

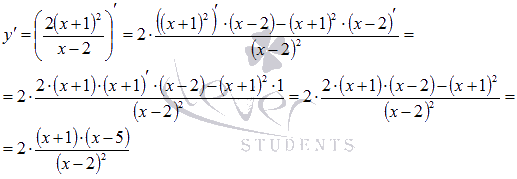
Слишком много слов, рассмотрим лучше несколько примеров нахождения точек экстремума и экстремумов функции с помощью первого достаточного условия экстремума функции.

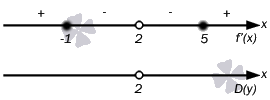
*Пример.*

Найти экстремумы функции формула.

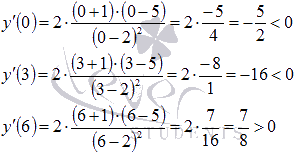
*Решение.*

Областью определения функции является все множество действительных чисел, кроме *x=2*.

Находим производную:  


Нулями числителя являются точки *x=-1* и *x=5*, знаменатель обращается в ноль при *x=2*. Отмечаем эти точки на числовой оси  


Определяем знаки производной на каждом интервале, для этого вычислим значение производной в любой из точек каждого интервала, например, в точках *x=-2, x=0, x=3* и *x=6*.

формула, следовательно, на интервале формула производная положительна (на рисунке ставим знак плюс над этим интервалом). Аналогично  


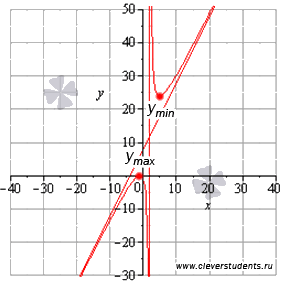
Поэтому над вторым интервалом ставим минус, над третьим – минус, над четвертым – плюс.

Осталось выбрать точки, в которых функция непрерывна и ее производная меняет знак. Это и есть точки экстремума.

В точке *x=-1* функция непрерывна и производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, по первому признаку экстремума, *x=-1* – точка максимума, ей соответствуем максимум функции формула.

В точке *x=5* функция непрерывна и производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, *x=-1* – точка минимума, ей соответствуем минимум функции формула.

**Графическая иллюстрация.**



*Ответ:*

формула.