

**Группа 46**

**Преподаватель:** Комлева М.Н.

**Дисциплина:** Инженерная графика

**Задание:** изучить теоретический материал на тему «Многогранники», сделать опорный конспект в рабочей тетради.

## Глава 6. МНОГОГРАННИКИ

### 6.1. Общие сведения о многогранниках

Одним из видов пространственных форм являются многогранники – замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники образуют грани; общие стороны многоугольников называются *ребрами*; вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящихся в одной точке – *вершинами* многогранника.

Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону от плоскости любой его грани, то многогранник называют выпуклым.

Наибольший практический интерес представляют собой призмы, пирамиды и правильные многогранники (тела Платона).

*Призма* – многогранник, две грани которого представляют равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами (основаниями). Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные друг другу, называют боковыми. Призму, ребра которой перпендикулярны к основаниям, называют *прямой*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

*Пирамида* – многогранник, одна грань которого плоский  $n$ -угольник (основание), а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной. Если основанием пирамиды является правильный многоугольник и высота ее проходит через вершину этого многоугольника, пирамиду называют *правильной*.

Многогранник называют *правильным*, если его грани представляют собой правильные и равные многоугольники. Гранями правильных многогранников могут быть только правильные треугольники, четырехугольники (квадраты) и пятиугольники.

Существует пять видов правильных многогранников (рис. 6.1):

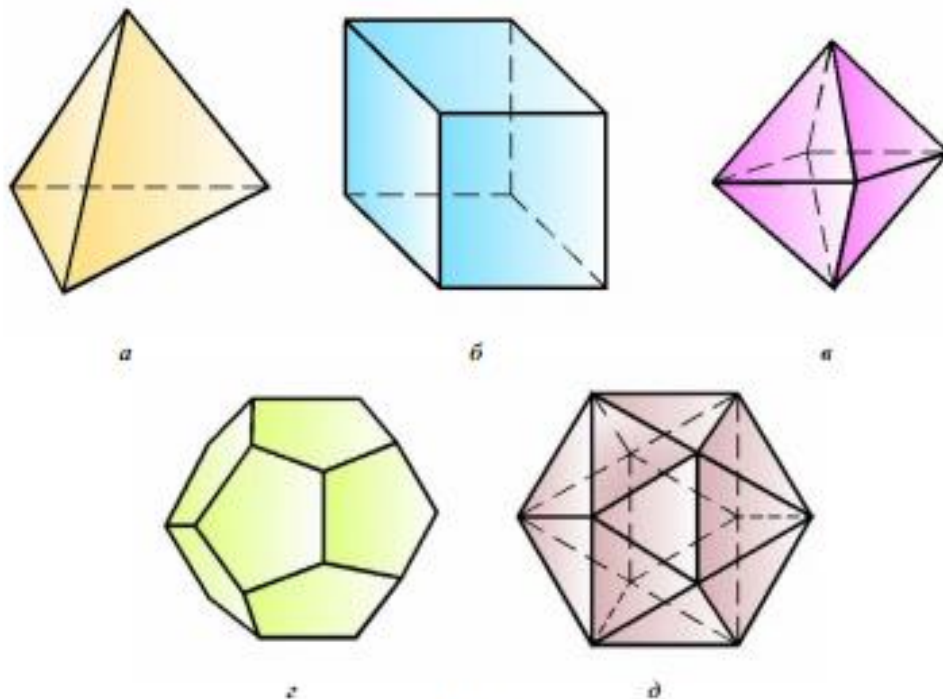


Рис. 6.1

- 1) правильный четырехгранник (тетраэдр) ограничен 4-мя равными правильными треугольниками. Представляет собой правильную пирамиду, в качестве основания которой может быть выбрана любая из 4-х граней (рис. 6.1, a);

- 2) правильный шестигранник (гексаэдр) ограничен 6-ю равными квадратами – это куб. Представляет собой частный случай правильной призмы (рис. 6.1, б);
- 3) правильный восьмигранник (октаэдр) ограничен 8-ю равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, в);
- 4) правильный двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен 12-ю правильными и равными пятиугольниками (рис. 6.1, г);
- 5) правильный двадцатигранник (икосаэдр) ограничен 20-ю равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, д).

У всякого выпуклого многогранника число граней ( $\Gamma$ ) плюс число вершин ( $B$ ) минус число ребер ( $P$ ) равно двум, т.е.  $\Gamma + B - P = 2$ .

## 6.2. Точка и прямая линия на поверхности многогранника

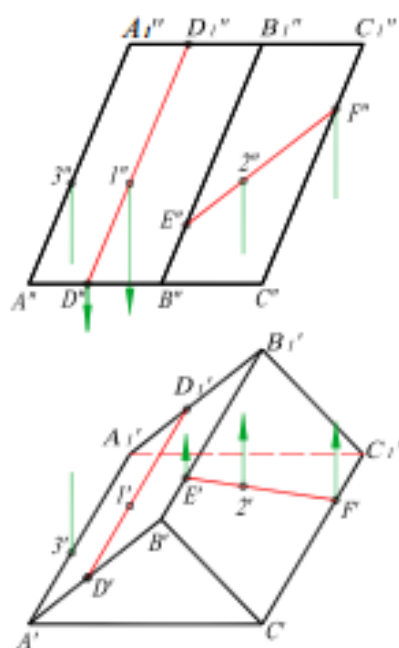


Рис. 6.2

Грани многогранника представляют собой плоскости. Поэтому построение точек и прямых на поверхности многогранника сводится к построению точек и прямых линий на плоскости.

Точки на гранях призмы и пирамиды строятся при помощи вспомогательных прямых, принадлежащих соответствующим плоскостям граней.

Чтобы определить по данной проекции  $1''$  точки 1, лежащей на грани  $AA_1BB_1$  наклонной призмы, горизонтальную проекцию  $1'$  (рис. 6.2), проводим через точку  $1''$  фронтальную проекцию вспомогательной прямой  $DD_1$ , параллельную ребрам призмы. Определив горизонтальную проекцию  $DD_1'$  вспомогательной прямой, по линии связи найдем горизонтальную проекцию  $1'$ .

Фронтальная проекция  $2''$  точки 2, лежащей на грани  $BB_1CC_1$ , построена с помощью вспомогательной прямой  $EF$ , проведенной через проекцию  $2'$ . Недостающую проекцию точки 3, расположенную на ребре  $AA_1$ , определим с помощью линии связи.

Нахождение недостающих проекций точек, находящихся на боковой поверхности прямой призмы (рис. 6.3) упрощается, т.к. боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями. Так горизонтальная проекция  $1'$  точки 1, расположенной на грани  $AA_1BB_1$  находится на отрезке  $A'B'$  ( $A_1'B_1'$ ). Профильную проекцию точки 1 определим с помощью линий связи.

Горизонтальная проекция  $2'$  точки 2, расположенной на боковом ребре  $BB_1$  совпадает с горизонтальной проекцией этого ребра. Профильную проекцию точки 2 построим при помощи горизонтальной линии связи.

На рис. 6.4 показано построение недостающих проекций точек, находящейся на боковой поверхности пирамиды  $SABC$ . Фронтальная проекция  $1''$  точки 1, расположенная на грани  $SBC$ , представляющей собой профильно-проецирующую плоскость, построена с помощью линий связи.

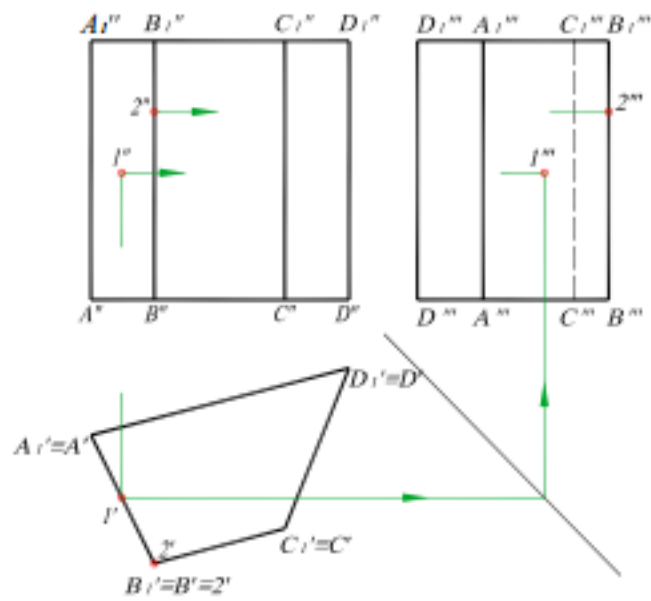
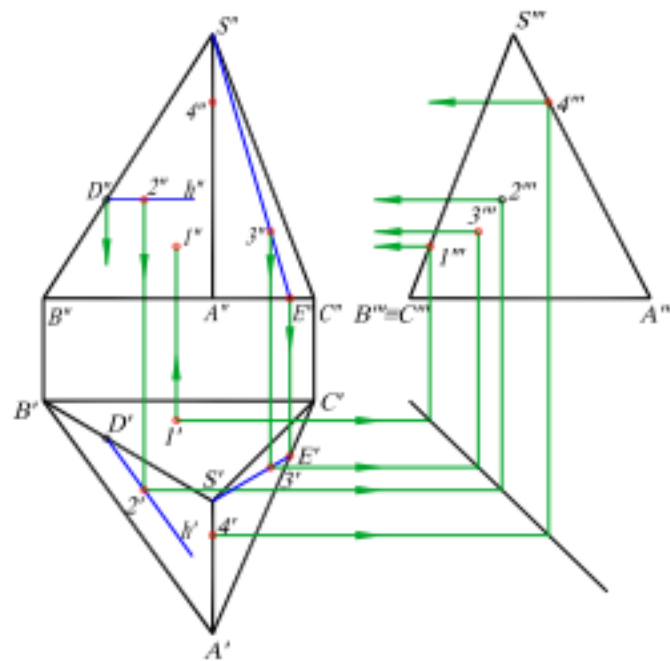


Рис. 6.3

Чтобы определить по заданной проекции  $2''$  точки 2, лежащей на грани  $SAB$ , проекцию  $2'$  (рис. 6.4), используем горизонталь  $h$ . Фронтальная проекция горизонтали  $h''$  проведена через проекцию  $2''$  до пересечения с проекцией  $B''S''$  ребра  $BS$  в точке  $D''$ . Горизонтальная проекция  $h'$  горизонтали  $h$  проходит через точку  $D'$  параллельно проекции  $A'B'$  стороны  $AB$ .





Чтобы определить по заданной проекции  $3''$  точки 3, расположенной на грани  $SAC$ , проекцию  $2'$  используем прямую  $SE$ . Фронтальная проекция  $S'E'$  проведена через проекцию  $3''$ . Построив горизонтальную проекцию  $S'E'$  по линии связи найдем  $3'$ . Фронтальная проекция  $4''$  точки 4, расположенная на ребре  $SA$ , построена с помощью линий связи сначала на профильной проекции ребра  $S''A''$ , а затем на фронтальной  $S'A'$ .

### 6.3. Пересечение многогранников плоскостью. Развертка поверхности многогранника

#### 6.3.1. Общие сведения

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получается многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения ребер многогранника плоскостью, а сторонами – отрезки прямых, по которым грани многогранника пересекаются этой плоскостью.

Определение вершин многоугольника сводится к построению точек пересечения прямых (ребер многогранника) с плоскостью – *способ ребер*.

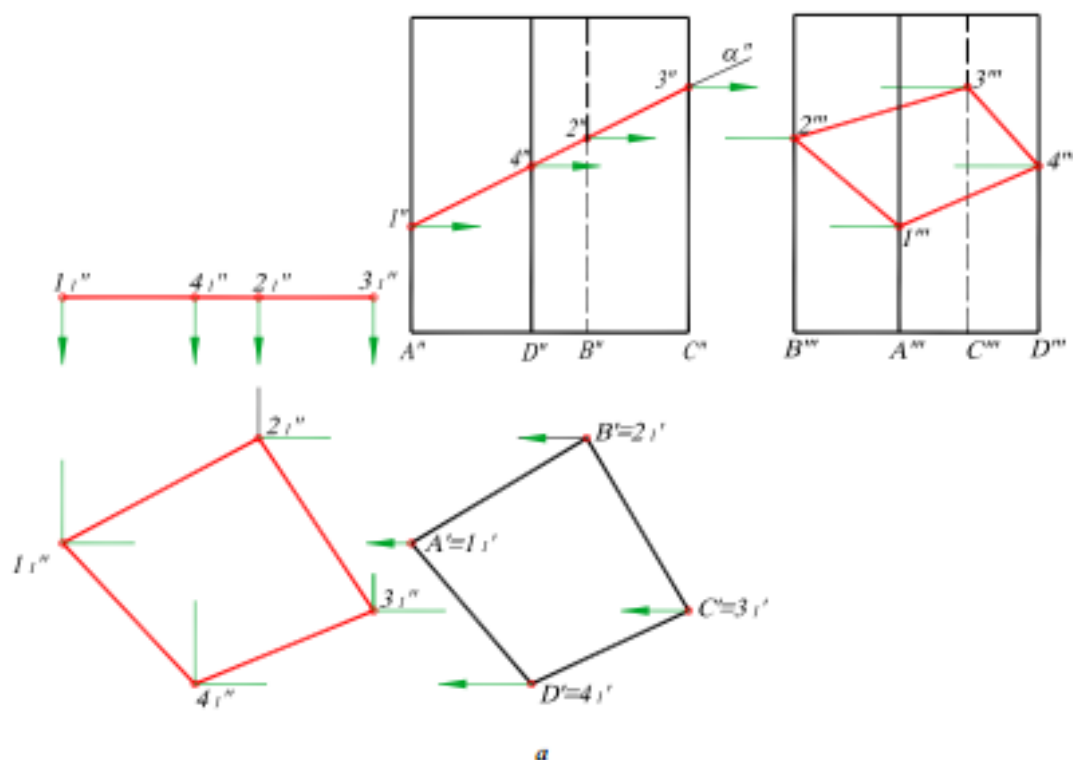
При определении сторон многоугольника решаются задачи на пересечение двух плоскостей – *способ граней*.

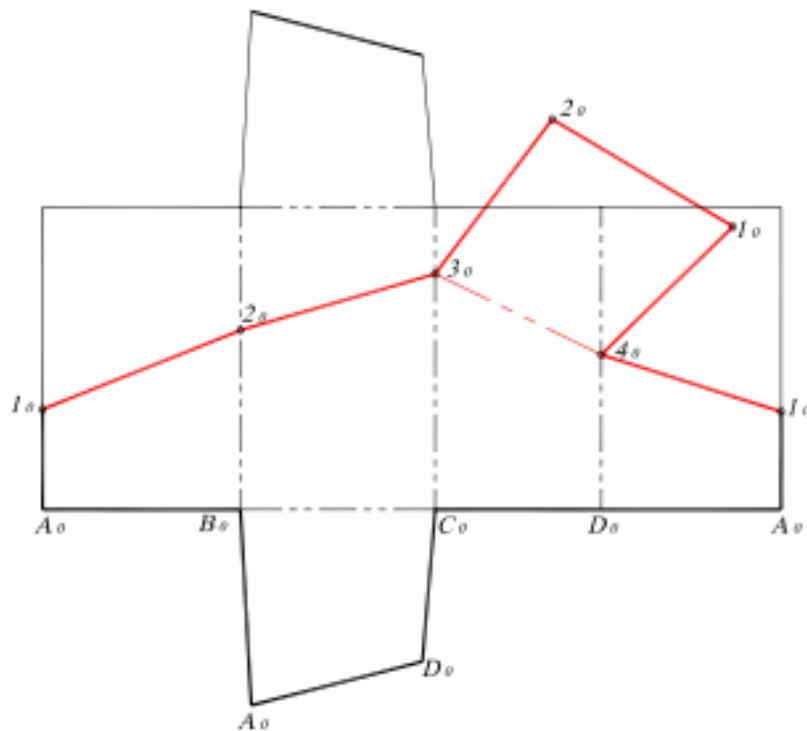
*Разверткой* называется фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с плоскостью (без наложения элементов поверхности друг на друга).

Развертки необходимы при изготовлении изделий из листового материала.

#### 6.3.2. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью

На рис. 6.5, а показано построение проекций линии пересечения прямой четырехугольной призмы фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$ .





б  
Рис.6.5

Пересечение следа – проекции  $\alpha''$  с фронтальными проекциями боковых ребер призмы дает проекции  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  вершин многоугольника сечения. Горизонтальные проекции этих вершин совпадают с «вырожденными» проекциями соответствующих ребер, так как призма прямая. Профильные проекции  $1'''$ ,  $2'''$ ,  $3'''$ ,  $4'''$  вершин определим при помощи горизонтальных линий связи на соответствующих проекциях ребер призмы.

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом плоскопараллельного перемещения. Переместим сечение в горизонтальное положение. Проекция  $1_1' - 2_1' - 3_1' - 4_1'$  – натуральная величина многоугольника сечения.

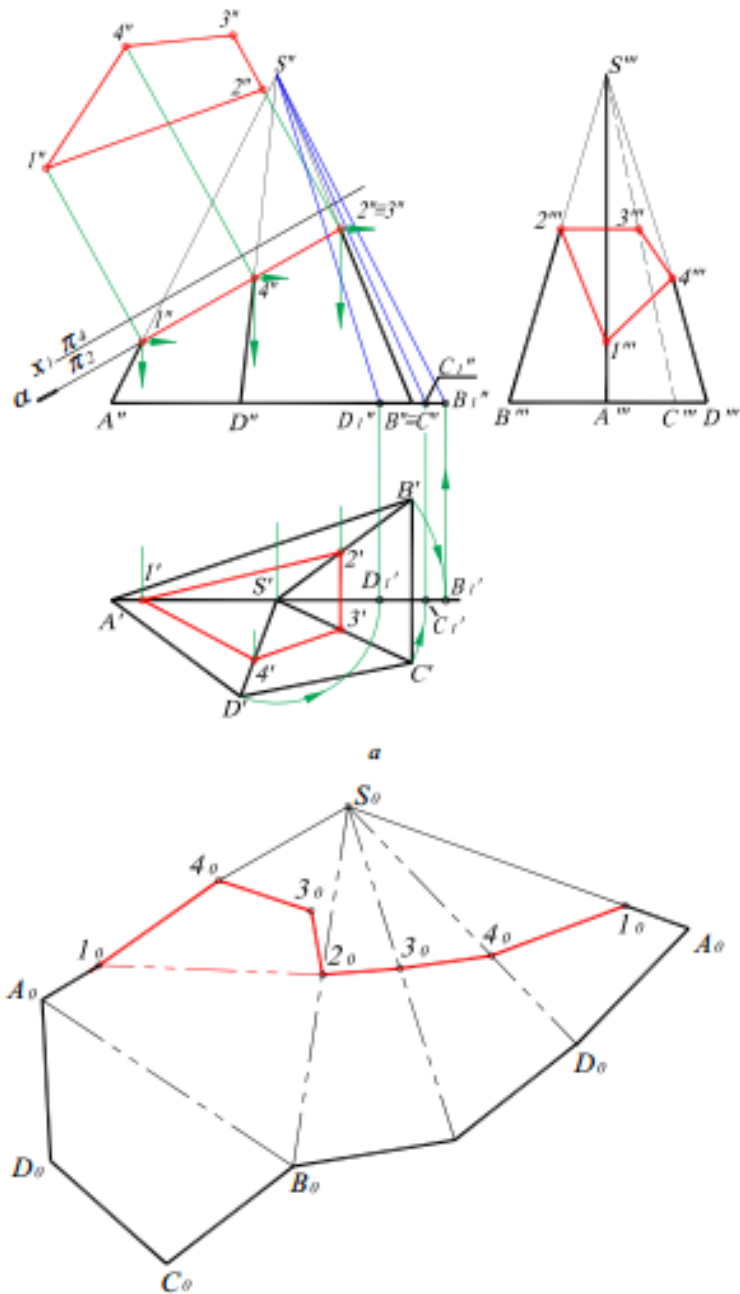
Развертка боковой поверхности призмы состоит из четырех прямоугольников, у которых одна сторона равна высоте призмы, а другие стороны равны сторонам основания призмы. Достроив к сторонам прямоугольника верхнее и нижнее основание призмы, получим полную развертку ее поверхности (рис. 6.5, б).

Для построения развертки боковой поверхности усеченной призмы наносим на развертку точки  $1_*$ ,  $2_*$ ,  $3_*$ ,  $4_*$ , расположенные на соответствующих ребрах. Чтобы получить полную развертку усеченной части призмы, к одному из участков линии пересечения (3-4) пристраиваем натуральную величину сечения.

Развертку усеченной части призмы обводим сплошной толстой основной линией, линии сгиба – на развертке – штрихпунктирной с двумя точками линией.

На рис. 6.6, а приведено построение проекций линии пересечения четырехугольной пирамиды  $SABC$  фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$

Фронтальные проекции  $1''2''3''4''$  вершин многоугольника сечения находятся в пересечении следа-проекции  $\alpha''$  плоскости  $\alpha$  с фронтальными проекциями боковых ребер пирамиды. Проекция  $2''$  и  $3''$  точек 2 и 3, лежащих на ребрах  $SB$  и  $SC$ , совпадают, так как грань  $SBC$  является фронтально-проецирующей плоскостью. Горизонтальные и профильные проекции точек 1, 2, 3, 4 определяются по линиям связи на соответствующих ребрах пирамиды.



6  
Рис. 6.6

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом перемены плоскостей проекций. Это четырехугольник  $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$ .

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из четырех треугольников – боковых граней пирамиды.

Одна из сторон треугольников определяется величиной, соответствующей горизонтальной проекции ребра основания пирамиды, поскольку основание пирамиды занимает горизонтальное положение.

Из боковых ребер пирамиды ребро  $AS$  параллельно фронтальной плоскости и проекция  $A''S''$  - его истинная величина. Для определения натуральной величины других бо-

ковых ребер используем способ вращения вокруг оси, проходящей через вершину  $S$  перпендикулярно плоскости  $\pi_1$ .

Поворачиваем ребра  $SB$ ,  $CS$ ,  $SD$  до положения, параллельного плоскости  $\pi_2$ . Длины проекций  $S''B_1$ ,  $C''S_1$ ,  $S''D_1$  являются натуральными длинами соответствующих ребер.

На рис. 6.6, б представлено построение полной развертки усеченной части пирамиды. Вначале на плоскости чертежа строим треугольники – боковые грани пирамиды – по трем сторонам, последовательно пристраивая треугольники друг к другу боковыми ребрами. Пристроив к стороне  $A\cdot B\cdot$  одного из треугольников четырехугольное основание пирамиды, получим полную развертку ее поверхности.

Чтобы выделить на развертке усеченную часть пирамиды, находим положение вершины  $1\cdot$  фигуры сечения на ребре  $A\cdot\delta\cdot$ . Зная натуральную величину многоугольника сечения  $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$ , последовательно засекаем на ребре развертки точки  $2\cdot, 3\cdot$  и  $4\cdot$ , используя величину сторон многоугольника сечения. Полученные на развертке точки соединяем отрезками прямых. Пристраиваем затем натуральную величину сечения  $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$  к одному из участков линии пересечения (1•2•). Полученную полную развертку поверхности усеченной пирамиды обводим сплошной толстой основной линией, а линии сгиба – штрихпунктирной с двумя точками линией.



### 7.7. Построение точек, лежащих на геометрических телах и поверхностях

Точка принадлежит поверхности в том случае, когда она находится на линии, принадлежащей этой поверхности. В качестве таких линий могут быть выбраны образующие, параллели, меридианы и др.

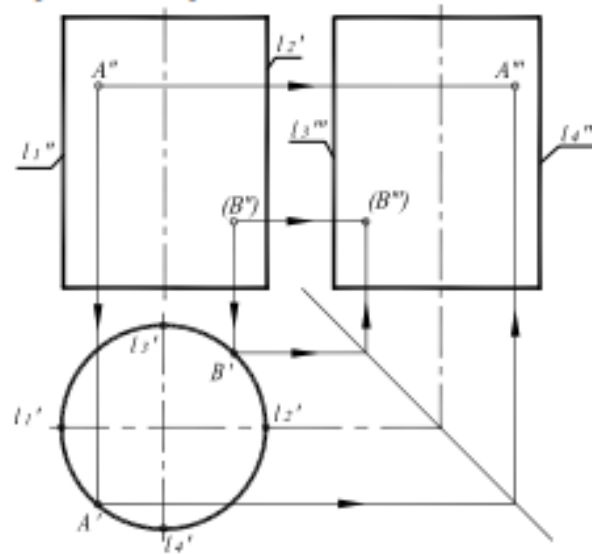


Рис. 7.35

Поверхности цилиндра вращения (рис. 7.35) является горизонтально проецирующей, образующие цилиндра перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, вследствие чего поверхность цилиндра проецируется на эту плоскость окружностью.

Горизонтальные проекции точек  $A$  и  $B$  ( $A'$  и  $B'$ ) лежат на окружности. Профильные проекции этих точек  $A'''$  и  $B'''$  находятся при помощи линий.

Очерковые образующие цилиндра разделяют фронтальную и профильные проекции на видимую и невидимые части. Так образующие  $L_1$  и  $L_2$  делят цилиндрическую поверхность на видимую спереди и невидимую, образующие  $L_3$  и  $L_4$  на видимую слева и невидимую. Невидимые проекции точек указаны в скобках.

Конус вращения является также и линейной поверхностью, поэтому для построения точек на его поверхности можно использовать и образующие и параллели.

На рис. 7.36, а показано построение горизонтальной  $A'$  и профильной  $A'''$  проекций точки  $A$  по заданной фронтальной проекции  $A''$ .

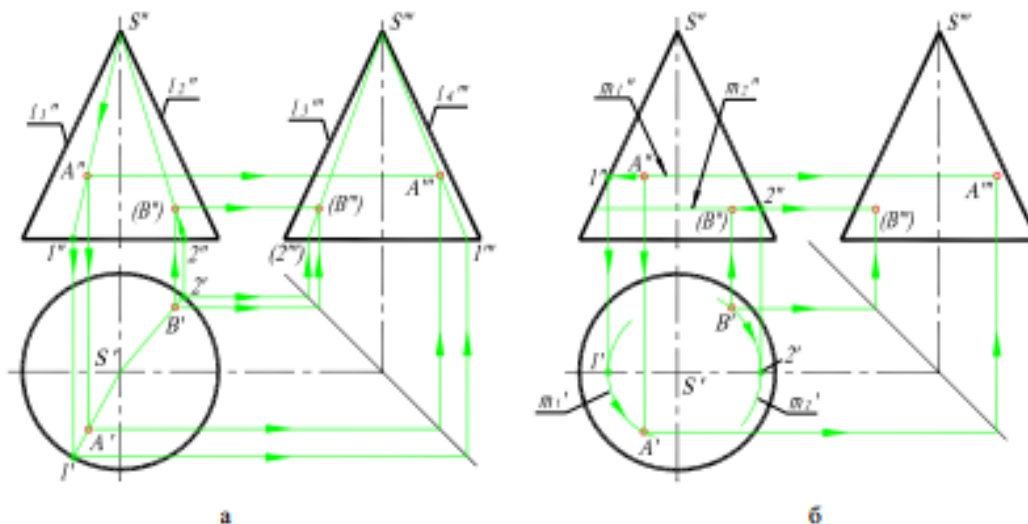


Рис. 7.36

Если задана горизонтальная проекция  $B'$  точки  $B$ , то построение начинается с проведения горизонтальной проекции  $S' 2'$  образующей  $S2$ , на которой находится точка  $B$ . Определить фронтальную проекцию  $S'' 2''$  этой образующей, по линиям связи находим фронтальную проекцию  $B''$  точки  $B$ , а затем и профильную  $B'''$ .

Образующие  $L_1$  и  $L_2$  разделяют коническую поверхность на видимую спереди и невидимую, а образующие  $L_3$  и  $L_4$  на видимую слева и невидимую.

Проекция  $B''$  и  $B'''$  находятся на невидимой части конуса. Горизонтальная проекция поверхности конуса является видимой.

На рис. 7.36, б показано построение недостающих проекций точек  $A$  и  $B$  при помощи параллелей. Через заданные проекции  $A''$  и  $B'$  проводятся проекции  $m''_1$  и  $m'_2$  параллелей  $m_1$  и  $m_2$ . Используя т.1 и 2, лежащие на очерковых образующих, определим положение проекций  $m'_1$  и  $m''_2$  проведенных параллелей. По линиям связи определим положение проекций  $A'$  и  $A''$  точки  $A$  и проекций  $B''$  и  $B'''$  точки  $B$ .