

Задание

1. Используя лекционный материал в этом документе, ответить на вопросы.
2. Ответ оформить в текстовом редакторе Word.
3. Готовую работу скинуть либо в социальной сети «ВКонтакте» в личном сообщении (<https://vk.com/id35792775>), либо скинуть на электронную почту guv@apt29.ru

Срок выполнения: до 12.10.20 до 09:00

Ответы на вопросы

1. Какие основные логические операции существуют? (Тема 3.1)
2. Как формульно записывается закон дистрибутивности? (Тема 3.1)
3. Напишите теоремы де Моргана. (Тема 3.1)
4. Как формульно записывается закон склеивания? (Тема 3.1)
5. Какой базис соответствует функции «стрелка Пирса»? (Тема 3.1)
6. Какой базис соответствует функции «штрих Шеффера»? (Тема 3.1)
7. Объясните процедуру минимизации логических функций. (Тема 3.2)

Лекционный материал

Тема 3. Аппаратная реализация логических функций

Тема 3.1. Законы алгебры и логики

Для анализа и синтеза цифровых электронных схем широко используется математический аппарат алгебры логики, или булевой алгебры. Функция алгебры логики принимает только два возможных значения: 0 или 1. Функции алгебры логики удобно задавать таблично в виде так называемых таблиц истинности.

Для построения цифрового устройства используют следующие функционально полные системы: И-ИЛИ-НЕ, И-НЕ (штрих Шеффера), ИЛИ-НЕ (стрелка Пирса).

Выбор минимального базиса связан с выбором стандартного набора логических элементов, из которых будет строиться конкретное цифровое устройство.

Операция НЕ (отрицание), обозначаемая символом «-» над соответствующей переменной; логическое сложение (дизъюнкция, операция ИЛИ), обозначаемое символом «+»; логическое умножение (конъюнкция, операция И), обозначаемое символом «·». Для обозначения эквивалентности логических выражений используется знак равенства « \Leftrightarrow ».

Табл. 1.

| | |
|--|---|
| Аксиомы (тождества) | $1 + A = 1;$ $0 \cdot A = 0$ |
| | $0 + A = A;$ $1 \cdot A = A$ |
| | $A + A = A;$ $A \cdot A = A$ |
| | $A + \bar{A} = 1;$ $A \cdot \bar{A} = 0$ |
| | $\bar{\bar{A}} = A$ |
| Законы коммутативности | $A + B = B + A;$ $A \cdot B = B \cdot A$ |
| Законы ассоциативности | $A + B + C = A + (B + C);$ $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ |
| Законы дистрибутивности | $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C);$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ |
| Законы дуальности (теоремы де Моргана) | $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ |
| Законы поглощения | $A + A \cdot B = A;$ $A \cdot (A + B) = A$ |
| Закон склеивания | $A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$ |

Используя данные тождества и законы, можно получать новые логические выражения, а также доказывать справедливость тех или иных законов на основании других.

Цифровое устройство должно выполнять свое функциональное назначение при минимальном наборе элементов, для чего необходимо найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) и минимизировать их.

Тема 3.2. Минимизация логических функций

Минимизация логических функций осуществляется с помощью *карты Карно*, изображающей в виде графических квадратов (клеток) все возможные комбинации переменных. Причем переменные, которые определяют координаты клеток карты, размещают так, чтобы при переходе из одной клетки в другую, как по горизонтали, так и по вертикали, изменялась только одна переменная.

Если требуется получить карту Карно для какой-либо функции, сначала надо записать эту функцию в совершенной дизъюнктивной нормальной форме, или в виде таблицы истинности.

Для примера возьмем функцию F с таблицей истинности, представленной в табл. 3. Переменные A , B , C , D являются последовательностью импульсов,

подаваемых на вход устройства. На выходе цифрового устройства получаем последовательность импульсов, которая соответствует функции F .

Табл. 3.

| Входы | Номера импульсов | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| A | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| F (итоговая функция) | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Карта Карно для заданной функции F (СДНФ) представлена в табл. 4.

Табл. 4.

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|--------------------|--------------------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|
| 00 | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ | $\bar{A}\bar{B}CD$ | $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ |
| 01 | $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ | $\bar{A}B\bar{C}D$ | $\bar{A}BCD$ | $\bar{A}BC\bar{D}$ |
| 11 | $AB\bar{C}\bar{D}$ | $AB\bar{C}D$ | $ABCD$ | $ABC\bar{D}$ |
| 10 | $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ | $A\bar{B}\bar{C}D$ | $A\bar{B}CD$ | $A\bar{B}C\bar{D}$ |

Формирование обвязок, минимизирующих функции СДНФ и СКНФ, выполняется по определенным правилам:

- 1) объединяются все квадраты из смежных клеток 1 и 0;
- 2) объединяются все строки или столбцы из смежных клеток 1 и 0;
- 3) объединяются все соседние клетки из 1 и 0;
- 4) одни и те же клетки могут входить в разные объединения;
- 5) объединяются отдельные клетки, строки, столбцы, если они расположены симметрично относительно основных геометрических осей карты.

Из нескольких вариантов объединения для разных вариантов обвязок отсеивают тупиковые формы и выбирают минимальную. Это и будет МДНФ либо МКНФ. Пользуясь правилами, составим уравнения обвязок и, применяя рассмотренные ранее законы преобразования (закон поглощения, закон склеивания, теорему де Моргана для функций СДНФ и СКНФ), найдем искомые МДНФ и МКНФ.

Изобразим карту для СДНФ, запишем единицы в клетки карты Карно в соответствии с заданной функцией F . Первое значение функции F равно 1,

значения ABCD-нули (см. табл. 3), находим ячейку и ставим единицу, аналогично записываем единицы в клетки карты, где функция принимает значение 1 (табл. 5).

Табл. 5

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00 | 1 | | | 1 |
| 01 | | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | 1 | 1 | 1 |

Определим МДНФ:

первая обвязка:

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}D + ABCD &= \bar{B}\bar{C}D(\bar{A} + A) + \\ &+ BCD(\bar{A} + A) = \bar{B}\bar{C}D + BCD = BD(\bar{C} + C) = BD; \end{aligned}$$

вторая обвязка:

$$\begin{aligned} A\bar{B}\bar{C}D + ABCD + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD &= ABD(\bar{C} + C) + \\ &+ A\bar{B}D(\bar{C} + C) = ABD + A\bar{B}D = AD(B + \bar{B}) = AD; \end{aligned}$$

третья обвязка:

$$A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} = A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C(D + \bar{D}) = A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C;$$

четвертая обвязка:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC(D + \bar{D}) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC;$$

пятая обвязка:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} = \bar{A}\bar{B}\bar{D}(\bar{C} + C) = \bar{A}\bar{B}\bar{D}$$

$$\begin{aligned} F &= BD + AD + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{D} = \\ &= BD(1 + \bar{A}\bar{C}) + AD(1 + \bar{B}\bar{C}) + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{D} = \\ &= BD + AD + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{D}; \end{aligned}$$

получим функцию МДНФ:

$$F = BD + AD + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{D}.$$

Карта Карно для заданной функции F (СКНФ) представлена в табл. 6.

Табл. 6.

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|--------------------|-----------------------------|-----------------------------------|---|-----------------------------------|
| 00 | $A + B + C + D$ | $A + B + C + \bar{D}$ | $A + B + \bar{C} + \bar{D}$ | $A + B + \bar{C} + D$ |
| 01 | $A + \bar{B} + C + D$ | $A + \bar{B} + C + \bar{D}$ | $A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$ | $A + \bar{B} + \bar{C} + D$ |
| 11 | $\bar{A} + \bar{B} + C + D$ | $\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}$ | $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$ | $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D$ |
| 10 | $\bar{A} + B + C + D$ | $\bar{A} + B + C + \bar{D}$ | $\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D}$ | $\bar{A} + B + \bar{C} + D$ |

Изобразим карту для СКНФ, запишем нули в клетки карты Карно в соответствии с заданной функцией F . Второе значение функции F равно 0, значения $A - 1, BCD -$ нули (см. табл. 3),

находим ячейку и ставим нуль, аналогично записываем нули в клетки карты, где функция принимает значение 0 (табл. 7).

Определим МКНФ:

первая обвязка:

$$\begin{aligned} & (A + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + B + C + D) = \\ & = (A + \bar{B} + C + D)(B + \bar{B})(\bar{A} + C + D) = (A + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + C + D); \end{aligned}$$

вторая обвязка:

$$(\bar{A} + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + D)(C + \bar{C}) = (\bar{A} + \bar{B} + D);$$

третья обвязка:

$$(A + B + C + \bar{D})(A + B + \bar{C} + \bar{D}) = (A + B + \bar{D})(C + \bar{C}) = (A + B + \bar{D});$$

получим функцию МДНФ:

$$F = (A + \bar{B} + C + D)(\bar{A} + C + D)(\bar{A} + \bar{B} + D)(A + B + \bar{D}).$$

Табл. 7.

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|--------------------|----|----|----|----|
| 00 | | 0 | 0 | |
| 01 | 0 | | | |
| 11 | 0 | | | 0 |
| 10 | 0 | | | |

Для аппаратной реализации МДНФ понадобятся пять умножителей и один сумматор, для МКНФ - четыре сумматора и один умножитель.

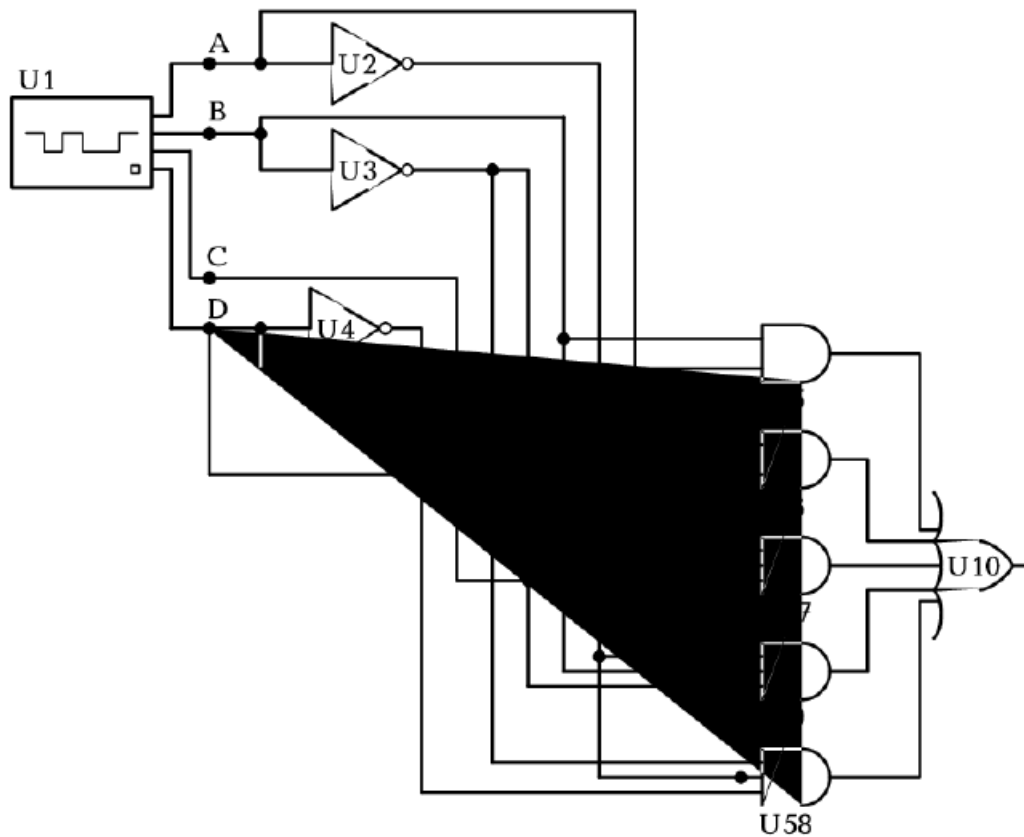


Рис. 3.1. Схема реализации МДНФ в Micro-Cap

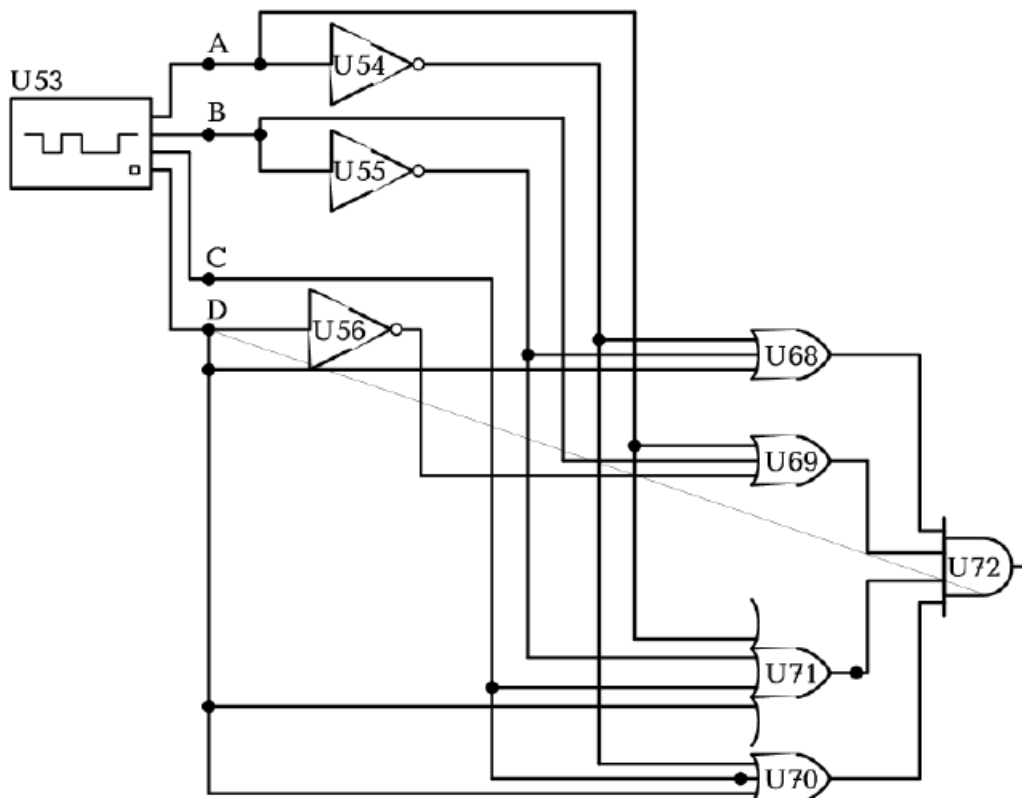


Рис. 3.2. Схема реализации МКНФ в Micro-Cap

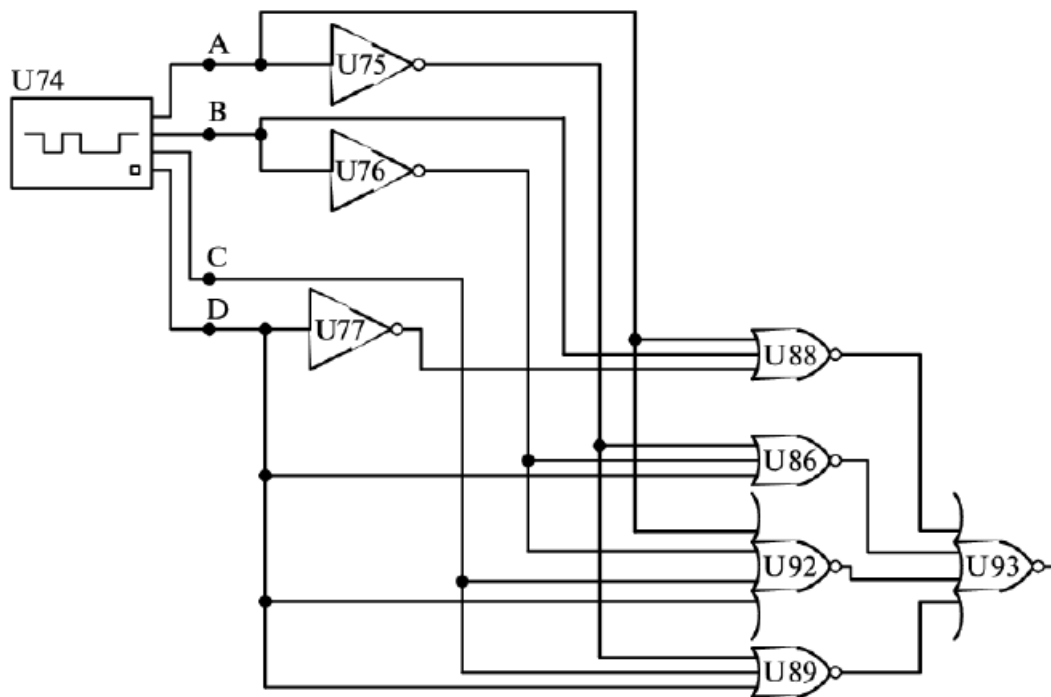


Рис. 3.3. Схема реализации МКНФ в базисе ИЛИ–НЕ в Micro-Cap

ВЫ

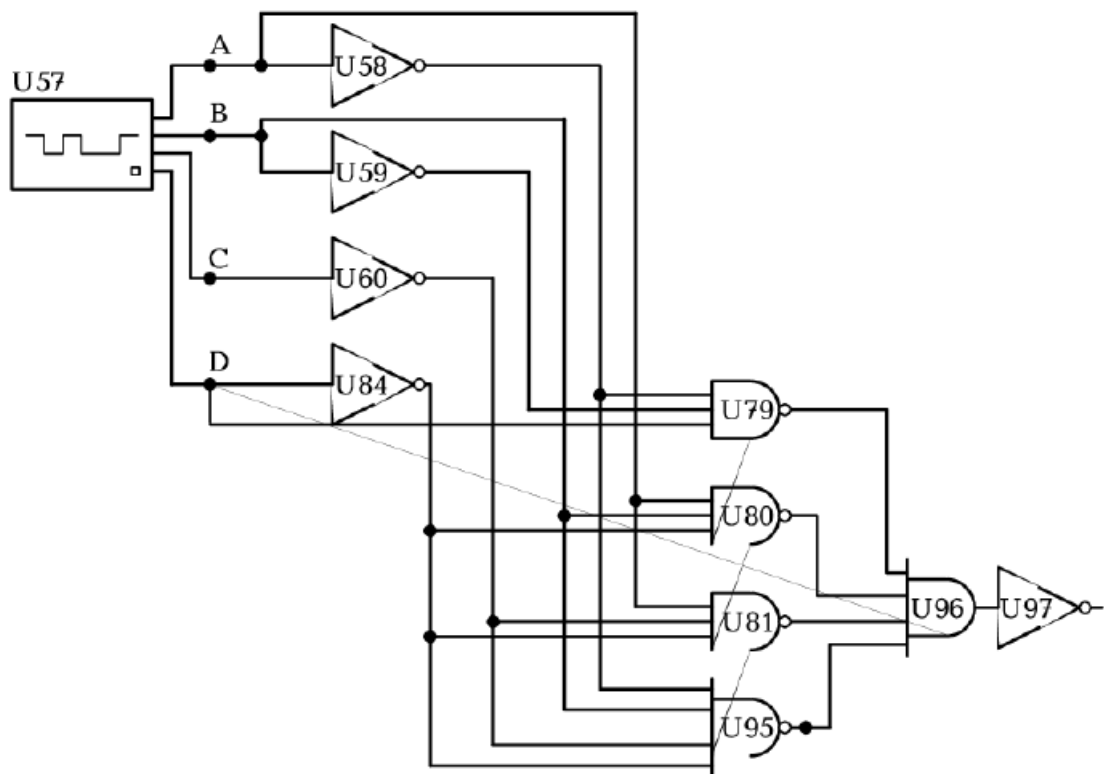


Рис. 3.4. Схема реализации МКНФ в базисе И–НЕ в Micro-Cap