Экзамен по математике

Инструкция для обучающихся:

Перед вами текст экзаменационного задания по курсу «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия». Работа составлена в 4 вариантах. В каждом варианте 10 заданий.
Внимательно читайте каждое задание. Если задание не удается выполнить сразу, переходите к следующему. Если остается время, вернитесь к пропущенным заданиям. Желаю успехов!

Примечание:
Запрещается пользоваться калькулятором.
Справочный материал предоставляю.

Критерии оценивания:

Отметка «3» (удовлетворительно) выставляется при выполнении любых пяти заданий.

Отметка «4» (хорошо) выставляется при выполнении любых семи заданий.

Отметка «5» (отлично) ставится за девять верно выполненных заданий.

Помним про требования по оформлению письменной экзаменационной работы, изложенные 16.05.

Вы должны отправить работы до 14.00.

После этого времени работы не проверяются, т.е. вы считаетесь не сдавшими экзамен.

Экзаменационная работа по математике
1 вариант.

(Головко А, Клокотов Д, Кутьина В)

1. Решите неравенство: $\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} < 0.$

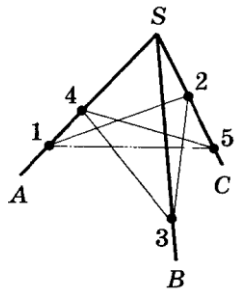
2. Решите уравнение: $49^{x+1} = (\frac{1}{7})^x$

3. Решите неравенство: $\log_3(2x-1) < 3$

4. Докажите тождество:
$$\sin^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S=t+0{,}5t^2$ *(м)*, где t – время движения в секундах. Найдите скорость тела через *4 с* после начала движения.

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4 и 5, расположенных на стержнях *SA, SB* и *SC*, которые не принадлежат одной плоскости. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.



7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.

8. В правильной четырехугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 60°. Высота пирамиды равна 6 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

9. Решите уравнение:
$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

10. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x = 3^{y+1} \end{cases}$$

Экзаменационная работа по математике
2 вариант.

(Загарев М, Мерзлый Е, Хапкина Л,)

1. Решите неравенство: $\frac{9-25x^2}{x+4} < 0.$

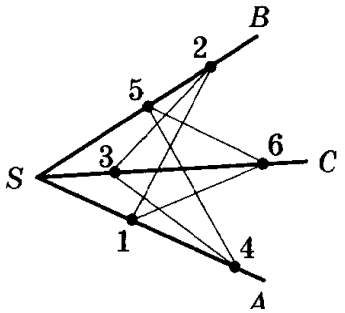
2. Решите уравнение: $27^{1-x} = \frac{1}{81}$

3. Решите неравенство: $\log_2(2x+1) > 4$

4. Докажите тождество:
$$\sin^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону $S=12t - 3t^2$ *(м)*, где t – время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на стержнях *SA, SB* и *SC*, которые не принадлежат одной плоскости. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.



7. Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см вокруг прямой, проходящей через середины его больших сторон.

8. В правильной четырехугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 30°. Сторона основания пирамиды равна 12 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

9. Решите уравнение:
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

10. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 16^x = 64^y, \\ 27^{x+1} = 81^{y-1} \end{cases}$$

Экзаменационная работа по математике
3 вариант.

(Минькин К, Кисляков И,)

1. Решите неравенство: $\frac{3x^2+4x}{9-x} > 0.$

2. Решите уравнение: $3^{x+2} + 3^x = 810$

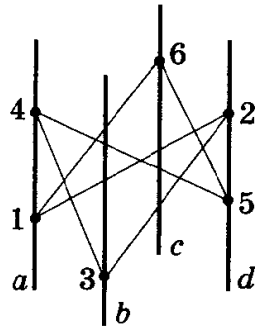
3. Решите неравенство: $\log_5(1-3x) \leq 2$

4. Докажите тождество:

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = 1.$$

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=3x^3+2x-5$ в его точке с абсциссой $x=2$.

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на четырех попарно параллельных стержнях *a, b, c* и *d*, никакие три из которых не принадлежат одной и той же плоскости. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.



7. Найдите объём тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг большей стороны.

8. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см и образует с боковой гранью угол 30°. Найдите объём пирамиды.

9. Решите уравнение:

$$\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$$

10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16 \end{cases}$$

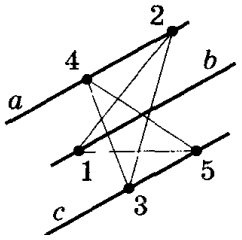
Экзаменационная работа по математике
4 вариант.

(Варакин А, Савчук В,)

1. Решите неравенство: $\frac{x^2-3x+2}{6+3x} > 0.$
2. Решите уравнение: $2^{x+4} - 2^x = 120$
3. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geq -2$
4. Докажите тождество:

$$\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha.$$

5. Дана функция $f(x)=2x^2 - x+1$. Найдите координаты точки её графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 7.
6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, и 5, расположенных на параллельных стержнях *a, b,* и *c* , не принадлежащих одной и той же плоскости. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.



7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг его оси симметрии, параллельной большей стороне.
8. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см и образует с боковым ребром угол 45°. Найдите объём пирамиды.
9. Решите уравнение:

$$2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$$

10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ 5^{x+3y} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Справочный материал

Решение квадратного уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad D = b^2 - 4ac$

$D < 0$ — нет корней,

$D = 0$ — один корень: $x = -\dfrac{b}{2a}$,

$D > 0$ — два корня: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$ax^2 + 2kx + c = 0$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Решение уравнений и неравенств

$\sqrt{f(x)} = g(x)$. Область определения задается неравенством $f(x) \geqslant 0$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt{f(x)^2} = |f(x)|$

$$\log_c f(x) = \log_c g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

$\log_c f(x) < \log_c g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$, где $c > 1$

$\log_c f(x) < \log_c g(x) \Leftrightarrow 0 < g(x) < f(x)$, где $0 < c < 1$

Степени и логарифмы

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^b a^c = a^{b+c}$

$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

$(a^b)^c = a^{bc}$

$a^c b^c = (ab)^c$

$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

$a^{\log_a b} = b$

$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

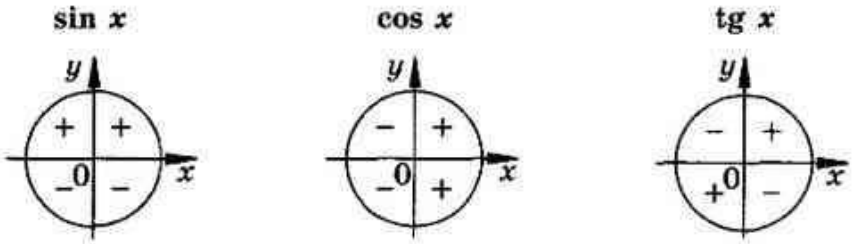
$\log_a b^c = c \log_a b$

$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Тригонометрия

Знаки тригонометрических функций



Значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Формулы приведения

β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

β	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin\beta$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Основные тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Простейшие уравнения

$$\sin x = a(-1 \leqslant a \leqslant 1) \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$$

$$\cos x = a(-1 \leqslant a \leqslant 1) \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2n\pi$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + n\pi$$

n — любое целое число

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$$

n — любое целое число

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

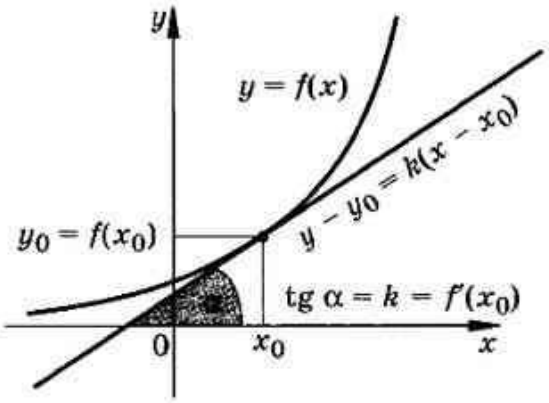
где $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Производная

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
kf	kf'	x^n	nx^{n-1}
$f(kx+b)$	$kf'(kx+b)$	$\sin x$	$\cos x$
$f+g$	$f'+g'$	$\cos x$	$-\sin x$
fg	$f'g+fg'$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	e^x	e^x
C	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$



Экстремумы функции

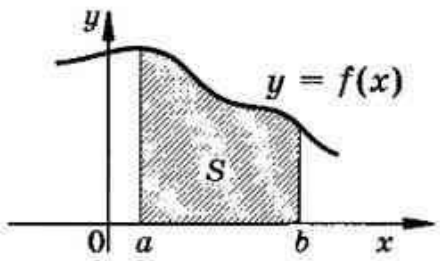
$$x_0 \text{ — критическая точка} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \text{ — внутренняя точка } D(f), \\ f'(x_0) \text{ равно 0 или не существует;} \end{cases}$$

При переходе через x_0 f' меняет знак

с минуса на плюс	с плюса на минус
x_0 — точка минимума	x_0 — точка максимума

Первообразная

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$kf(x)$	$kF(x)$	e^x	e^x
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
C	Cx	$\sin x$	$-\cos x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$		

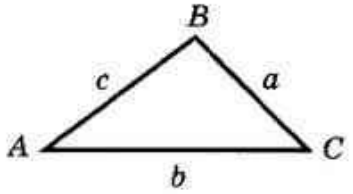


Площадь

$$S = F(b) - F(a)$$

Геометрия

Планиметрия



Треугольник

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше их разности:

$$b - c < a < b + c.$$

Сумма углов в треугольнике:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Средней линией называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

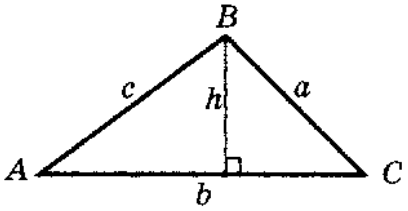
Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

где R — радиус описанной окружности.

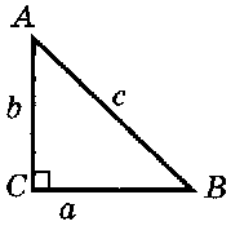
Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Площадь треугольника:

1) $S = \frac{1}{2}ah$; 2) $S = \frac{1}{2}ab \sin C$



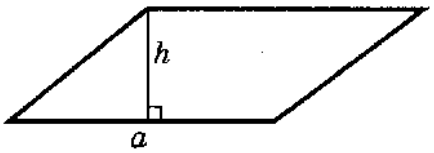
Прямоугольный треугольник



Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$;

$\sin A = \frac{a}{c}$; $\cos A = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$

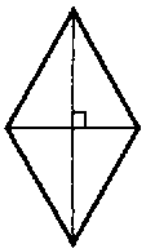
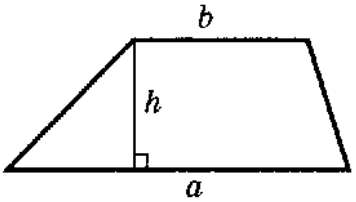
Параллелограмм



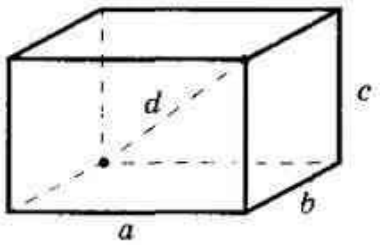
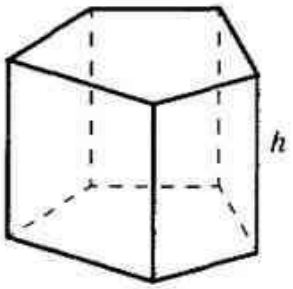
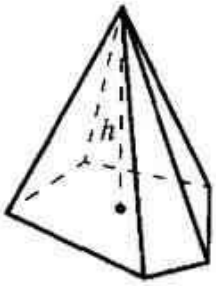
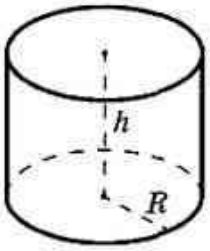
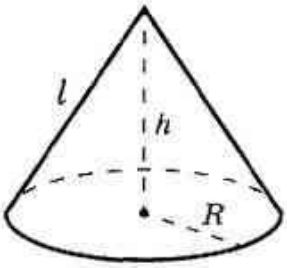
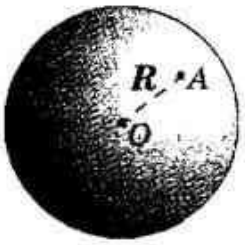
Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма равны.
2. Противоположные стороны параллелограмма параллельны.
3. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.
4. Противоположные углы параллелограмма равны.

Площадь параллелограмма: $S = ah$.

Ромб	**Трапеция**
	
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны	*Площадь трапеции*: $S = \frac{a+b}{2}h$

Многогранники

Прямоугольный параллелепипед  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $S_{бок} = 2(ac + bc)$; $S_{полн} = 2(ab + bc + ac)$; $V = abc$	**Призма**  $V = S_{осн}h$
Пирамида  $V = \frac{1}{3}S_{осн}h$	**Цилиндр**  $V = \pi R^2 h$; $S_{бок} = 2\pi Rh$
Конус  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$; $S_{бок} = \pi Rl$	**Шар**  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $S = 4\pi R^2$