Добрый день, гр. 45. Продолжаем очередную тему, к сожалению в таком формате, но эта тема вынесена на экзамен. Сегодня вы пишите конспект полностью с примерами решения задач. Далее все по плану. Срок сдачи конспекта 07.05. С ув. Н.В. Мамонова

**Прямой поперечный изгиб**

Изгибом называют вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает изгибающий момент. Стержень с прямолинейной осью, испытывающий деформацию изгиба, называют балкой.

Изгиб называют **прямым**, если внешние силы действуют в плоскости, которая называется главной – это плоскость, проходящая через одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения и продольную ось балки (рис. 26,*а*). Если плоскость, в которой действуют силы, не совпадает с главной, то изгиб называют **косым** (рис.26,*б*).

Если в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент *М*, то изгиб называют **чистым**. Если помимо изгибающего момента в сечении возникает еще и поперечная сила *Q*, изгиб называют **поперечным**.

|  |
| --- |
| силовая пл-ть  *а б* |
| Рис. 26. Главная и силовая плоскости балки |

Внешние силы (рис. 27) балка передает на опоры, которые можно разделить на три вида: шарнирно – подвижную опору, шарнирно – неподвижную опору и жесткую заделку (рис. 1).

|  |
| --- |
| рисунок 21.png |
| Рис. 27. Двухопорная балка: *l -* длина пролета (пролет - часть балки между опорами), *l1*– длина консоли (консоль – часть балки,  имеющая опору только с одной стороны) |

Для расчетов балки на прочность при изгибе строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Для прямого поперечного изгиба **поперечная сила *Q***в произвольном сечении балки вычисляется как алгебраическая сумма внешних приложенных сил (включая и реакции опор), расположенных по одну сторону от сечения и действующих перпендикулярно продольной оси балки. По правилу знаков поперечная сила в сечении считается положительной, если силы стремятся повернуть часть балки по ходу часовой стрелки, и отрицательной, если силы стремятся повернуть часть балки против хода часовой стрелки (рис. 28, *а*).

|  |  |
| --- | --- |
| ку и эм | |
| *а* | *б* |
| Рис. 28. Схемы для правила знаков при определении поперечной силы *QY*(*а*) и изгибающего момента *МX* (*б*) в сечениях балки | |

**Изгибающий момент *М*** в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, вычисленных относительно этого сечения (включая и моменты реакций опор), приложенных к балке по одну сторону от рассматриваемого сечения. По правилу знаков момент силы относительно сечения считается положительным, если балка изгибается выпуклостью вниз, иначе – отрицательным (рис. 28,*б*).

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по характерным сечениям необходимо учитывать следующие правила:

1. На участках, где изгибающий момент постоянен, поперечная сила равна нулю.
2. На участках, свободных от равномерно распределенной нагрузки поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.
3. На участке, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой, эпюра *Q* – наклонная прямая, а эпюра *Ми* – парабола (кривая второго порядка).
4. Если поперечная сила, изменяясь непрерывно, проходит через нулевое значение, то в соответствующем сечении изгибающий момент имеет экстремальное (максимальное или минимальное) значение.
5. В точках, соответствующих началу и концу участка, в пределах которого на балку действует распределенная нагрузка, параболическая и прямолинейная части эпюры *Ми* сопрягаются плавно, если на границах указанного участка не приложено сосредоточенных сил.
6. Если распределенная нагрузка направлена вниз, то парабола, представляющая собой эпюру *Ми*, обращена выпуклостью вверх, т.е. «навстречу» нагрузке.
7. Если на некотором участке:

а) , то изгибающий момент возрастает (слева направо);

б) , то изгибающий момент убывает;

в) , то изгибающий момент постоянен (чистый изгиб).

8. В точках приложения сосредоточенных сил на эпюре поперечных сил имеют место скачки, равные по величине приложенным силам, а на эпюре моментов – переломы (изменение угла наклона смежных участков эпюры).

9. В сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюре моментов возникают скачки, равные этим приложенным моментам.

Используя перечисленные правила, можно строить эпюры *Q* и *Mи* для характерных сечений и соединив их линиями в соответствии с изложенными выше правилами. Для определения экстремальных значений изгибающих моментов дополнительно подсчитываются моменты в сечениях, где поперечная сила равна нулю.

Расчет балки на прочность при прямом поперечном изгибе выполняется по нормальным напряжениям, максимальное расчетное напряжение в сечении балки вычисляется как

 (31)

где *МХ*, – наибольший по модулю изгибающий момент в сечении балки, относительно оси *x,* Н·м*;*

*WX* - осевой момент сопротивления поперечного сечения относительно оси *x*, м3;

σ – нормальное напряжение, Па (Н/м2).

Если изгиб балки происходит в другой главной плоскости, изгибающий момент в сечении возникает относительно оси *y*, тогда напряжение рассчитывается как

 (32)

где *МY*, – наибольший по модулю изгибающий момент в сечении балки, относительно оси *y,* Н·м*;*

*WY* - осевой момент сопротивления поперечного сечения относительно оси *y*, м3.

В дальнейшем будем использовать выражение .

Условие прочности при изгибе: наибольшее расчетное нормальное напряжение в сечении балки не должно превышать допускаемого напряжения для материала балки:

 (33)

При проектном расчете балки определяют размеры поперечного сечения балки, при которых будет выполняться условие прочности. Вычислив осевой момент сопротивления *WX*, можно подобрать стандартный прокатный профиль (например, двутавровый), для которого данная величина указана в таблице ГОСТа. При другой форме сечения можно вычислить размеры, найдя из условия прочности величину *WX*, форма сечения должна быть известна. Из условия прочности осевой момент сопротивления вычисляется как



Для прямоугольного поперечного сечения осевые моменты сопротивления, *W*, м3, рассчитываются по формулам:

 (34)

 (35)

где *b* и *h* – ширина и высота прямоугольника соответственно, м (рис. 29,*а*). Так как величины осевых моментов сопротивления *WX* и *WY* разные, выгоднее расположить сечение балки таким образом, чтобы ось, относительно которой момент инерции максимален, была нейтральной осью сечения - (рис. 29,*б*). Нейтральной осью будет ось инерции поперечного сечения, по которой проходит нейтральный слой – для балки это слой, в котором нормальные напряжения при изгибе равны нулю (на рис. 26,*а* нейтральная ось сечения - *х*, на рис. 29,*б* – ось *х*, на рис. 29,*в* – ось *у*.)

|  |  |
| --- | --- |
| прямоугольник | рисунок 24 -Н |
| *а* | *б в* |
| Рис. 29. Размеры прямоугольного сечения балки (*а*)  и различное расположение балки под нагрузкой (*б*, *в*) | |

**Задача № 6**

Для двухопорной и консольной балок построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать из условия прочности профиль двутавра для балки (см. таблицу 7). Также из условия прочности вычислить размеры поперечного сечения балки в виде прямоугольника (рис. 29,*а*) высотой *h* и шириной *b*, приняв соотношение *h* = 2 *b*. Допускаемое нормальное напряжение =150 МПа.

**Пример решения задачи для двухопорной балки (**расчетная схема приведена на рис. 30,*а*):

|  |  |
| --- | --- |
| пример -1  *F*=3 кН, *М*=4 кН м, *q* =2 кН/м;  *l*=6 м, *а* =1м, *b* =1м, *с* =1 м. |  |
| *а* | *б* |
| Рис. 30. Схема нагружения балки (*а*) и расчетная схема, построенная с учетом масштаба, с обозначенными сечениями (*б*) | |

1. Определим реакции в опорах из условия равновесия балки: см. пример решения задачи 2, где определяются реакции опор балки. По результатам вычислений 

2. Разбиваем балку на участки. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние усилия или происходит изменение размеров поперечного сечения. Разбиваем балку на 4 участка: АС, CD, DB, BЕ (рис. 30,*б*), где размеры участков показаны с соблюдением масштаба. Справа и слева на бесконечно малом расстоянии от границ участков проводим характерные сечения, в которых определяем *Q* и *Ми*. Таким образом имеем 8 характерных сечений.

3. Определяем поперечные силы *Q* и изгибающие моменты *М* в сечениях балки (рис. 30), используя правило знаков.

Участок АС (рис. 30,*б*).

На данном участке распределенная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила *Q АС* будет постоянной, а изгибающий момент *М АС* будет изменяться по линейному закону.

*Сечение 1* расположено справа от линии действия реакции *R*AY. В этом сечении изгибающий момент равен нулю (*Ми1* = 0), т.к. сечение отстоит от линии действия реакции *R*AY на бесконечно малую величину и плечо действия реакции*R*AY практически равно нулю, *Q1* *=* *R*AY =3 кН.

*Сечение 2* расположено слева от начала действия распределенной нагрузки. После проведения сечения мысленно отбросим правую часть балки и рассмотрим равновесие оставшейся части. Из условия равновесия получим:

*М* *и2* = *R*AY ·*а* = 3·1=3 кН·м, *Q2* *=* *Q1* *=* *R*AY =3 кН.

Участок СD (рис. 30, *б*).

На данном участке действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности, поэтому поперечная сила *QСD* изменяется по линейному закону, а изгибающий момент *МСD* по параболе (кривой второго порядка).

*Сечение 3* проведено правее начала действия распределенной нагрузки. Для этого сечения *М* *и3* = *М* *и2 =* 3 кН·м; *Q3* *=* *Q2* *=* *R*AY =3 кН.

*Сечение 4* расположено слева от линии действия приложенного внешнего момента *М*. Для данного сечения:

*Ми4* = *R*AY ·(*l-b)* -*q· (l-a-b)2/*2 =3·(6-1) -2·(6-1-1)2/2 = -1 кН·м;

*Q4=* *R*AY -*q*·*(l-a-b)* =3-2(6-1-1) = -5кН.

Для построения эпюры изгибающих моментов на участке СD следует рассмотреть дополнительное сечение 9, в котором поперечная сила проходит через нулевое значение. Следовательно, изгибающий момент в этом сечении будет иметь экстремальное значение. Положение этого сечения *х* (см. рис. 31) найдем, приравняв к нулю выражение, которое используется для вычисления поперечной силы на данном участке:

*Q9 =* *R*AY -*q*·*х* =0, откуда *х* = м

Момент в данном сечении:

*Ми9*= *R*AY ·(*a*+*х*)- *q*кН м

Участок DB (рис. 30,*б*).

На данном участке действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности, поэтому поперечная сила *QDB*изменяется по линейному закону, а изгибающий момент *МDB* по параболе (кривой второго порядка). На предыдущих участках при вычислении Q и Mи в сечениях рассматривали равновесие левой части, при этом правая отбрасывалась. Для упрощения расчетов иногда целесообразно рассматривать равновесие другой части конструкции, в данном случае правой.

*Сечение 5* рассматривая правую часть, получаем выражения для расчета поперечной силы:

*Ми5* = - F·(c + *b*) +*R*BY · *b*-*q· b2/*2 =- 3·(1+1)+10·1-2·12/2 = 3 кН м;

*Q5=* *F*- *R*ВY +*q*· *b =*3-10+2·1 = -5кН

Участок ВЕ (рис.30,б).

На данном участке распределенная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила *QВЕ* будет постоянной, а изгибающий момент *МВЕ* будет изменяться по линейному закону.

*Сечение 6* проведено от левой границы участка, рассматривая правую часть, получаем выражения для расчета изгибающего момента *Ми* и поперечной силы *Q:*

*Ми6* = -F ·*с* = -3 ·*1*= -3 кН·м; *Q6 =* *F- R*BY = 3- 10 = -7 кН.

*Сечение 7* рассмотрев равновесие правой части балки получим:

*Ми7* = -F ·*с* = -3 ·*1*= -3 кН·м; *Q7 =* *F* = 3 кН.

*Сечение 8* проведено слева от границы участка, рассматриваем правую часть балки:

*Ми8* = -F ·*0* = 0 кН·м; *Q7 =* *F* = 3 кН.

4. По полученным данным строим эпюры поперечной силы *Q* и изгибающих моментов *Ми* (рис. 31).

Для построения эпюры поперечных сил *Q* проводим прямую, параллельную оси балки, указывая на ней границы участков балки. От этой прямой откладываем в некотором масштабе вычисленные значения поперечных сил – положительные значения – вверх, отрицательные значения – вниз. Соединяем значения на границах участков согласно характеру эпюры для каждого участка. На участках АС и ВЕ поперечная сила *Q* постоянна и ее эпюра – прямая, параллельная оси балки, на участках CD и DB поперечная сила *Q* изменяется линейно и ее эпюра – наклонная прямая.

Для построения эпюры изгибающих моментов *М* проводим прямую, параллельную оси балки, указывая на ней границы участков балки. От этой прямой откладываем в некотором масштабе вычисленные значения изгибающих моментов – положительные значения – вверх, отрицательные значения – вниз. Соединяем значения на границах участков согласно характеру эпюры для каждого участка. На участках АС и ВЕ изгибающий момент *М* изменяется по линейному закону, и его эпюра – наклонная прямая, на участках CD и DB изгибающий момент *М* изменяется по уравнению второго порядка, и его эпюра – парабола.

5. Определим размеры поперечного сечения балки из условия прочности. Подберем профиль двутавра для балки (таблица 7). Также вычислим размеры поперечного сечения балки в виде прямоугольника (рис. 29,*а*) высотой *h* и шириной *b*, приняв соотношение *h*=2 *b*. Допускаемое нормальное напряжение =150 МПа. Из условия прочности момент сопротивления балки



Расчет будем вести по опасному сечению, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент. В нашем случае это сечение на участке CD, в котором поперечная сила проходит через нулевое значение, М*XMAX*= 5,25 кН·м. Необходимый из условия прочности осевой момент сопротивления балки

= 0,000035 м3

35·10-6 м3 = 35 см3

Определение поперечного сечения балки:

а) Подбор стандартного профиля двутавра.

Из таблицы 7 подбираем номер профиля двутавра, у которого осевой момент сопротивления не меньше расчетного, полученного из условия прочности. Выбираем двутавр № 10, у которого 39,7 см3. Следует выписать из таблицы приложения все основные размеры поперечного сечения профиля и выполнить эскиз поперечного сечения двутавровой балки.

б) Определение размеров прямоугольного поперечного сечения со сторонами *h* и *b*, при *h* = 2 *b*.

Вычисляем размеры поперечного сечения балки:



Откуда, используя полученное значение 35·10-6 м3, найдем *h*:

*h* = 0,075 м. Примем *h* = 76 мм, тогда

*b* = 0,5 *h* = 38 мм.

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 31. Схема нагружения балки и эпюры  поперечных сил *Q* и изгибающих моментов *Ми* |

**Пример решения задачи для консольной балки:**

Исходные данные и схема балки:

|  |  |
| --- | --- |
| рис | *F* = 10 кН, *М* = 6 кН м,  *q* =4 кН/м;  *l* = 6 м, *а* = 2 м, *b* = 2 м. |

Балку разбиваем на три участка – СА, АВ и ВD. Принцип деления на участки тот же, что и в предыдущем примере. Границами участков являются точки приложения сил, моментов и границы действия распределенной нагрузки. Проводя сечения на каждом участке, будем рассматривать равновесие правой части (рис. 32), в этом случае левая часть балки с опорой будет «отброшена», и величина реакции опоры *R*СY в расчетах не потребуется.

Определяем поперечные силы *Q* и изгибающие моменты *Ми* на участках балки, согласно правилу знаков.

Участок ВD (рис. 32).

На данном участке приложена распределенная нагрузка постоянной интенсивности, поэтому поперечная сила *QВD* изменяется по линейному закону, а изгибающий момент *МВD* по параболе (кривой второго порядка).

*Сечение 1: Q1=* -*F* = -10 кН;

*Ми1* = F· *0* = 10·0 = 0 кН· м.

*Сечение 2: Q2=* -*F* + *q*·*b*= -10 + 4·2 = -2кН;

*Ми2* = F· *b- q·b2/*2 = 10·2 - 4·22/2 = 12 кН· м.

Участок АВ (рис. 32).

На данном участке приложена распределенная нагрузка постоянной интенсивности, поэтому поперечная сила *QАВ* изменяется по линейному закону, а изгибающий момент *М* *АВ*  по параболе (кривой второго порядка).

*Сечение 3: Q3= Q2=* -*F* + *q*·*b*= -10 + 4·2 = -2кН;

*Ми3*= F· *b- q·b2/*2 –М = 10·2 - 4·22/2 - 6= 6 кН· м.

*Сечение 4: Q4* = -*F* + *q*·*(l-a)=* -10 + 4·(6-2) = 6кН;

*Ми4* = F·(*l-a*)*- q· (l-a*)*2/*2 – *M=* 10·(6-2) - 4·(6-2)2/2 - 6 = 2 кН·м.

Для построения эпюры изгибающих моментов на участке АВ следует рассмотреть дополнительное сечение 7, в котором поперечная сила проходит через нулевое значение. Следовательно, изгибающий момент в этом сечении будет иметь экстремальное значение. Положение этого сечения *х* (рис. 32) найдем, приравняв к нулю выражение, которое используется для вычисления поперечной силы на данном участке:

*Q7 =* -*F+q*·(*b+х)*= 0, откуда х = м

Момент в сечении:

*Ми7*= *F* ·(*b*+*х*)- *q* *= 10* ·(*2*+0,5)- *4*6,5кН·м.

*Сечение 5: Q5=Q4* = -*F* + *q*·*(l-a)=* -10 + 4·(6-2) = 6кН;

*Ми5* =*Ми4* = F·(*l-a*)*- q· (l-a*)*2/*2 – *M=* 10·(6-2) - 4·(6-2)2/2 - 6 = 2 кН·м.

Участок СА (рис.32).

На данном участке распределенная нагрузка отсутствует, поэтому поперечная сила *QСА* будет постоянной, а изгибающий момент *МСА* будет изменяться по линейному закону.

*Сечение 6: Q6= Q5=* -*F* + *q*·( *l* - *a* )*=***-**10 +4· (6-2)=6 кН,

*М6* = F·*l- q·*(*l - a*)*·(* (*l - a)/2+* *а*) – *M=*10·6- 4·(6 - 2)·(4/2+2) - 6 = -10 кН м.

По полученным данным строим эпюры поперечной силы и изгибающего момента (рис. 32). Эпюры строим по тем же правилам, что и для предыдущего примера.

Определяем размеры поперечного сечения балки из условия прочности. Расчет будем вести по опасному сечению, в котором действует наибольший по модулю изгибающий момент. В нашем случае это сечение на участке ВD, *МXMAX*= 12 кН м. Необходимый из условия прочности осевой момент сопротивления балки

=0,00008 м3

80·10-6 м3 =80 см3

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 32. Схема нагружения балки и эпюры поперечных сил *Q*  и изгибающих моментов *Ми* |

а) Подбор стандартного профиля двутавра.

Из таблицы 7 подбираем номер профиля двутавра, у которого осевой момент сопротивления не меньше расчетного, равного 80 см3. Выбираем двутавр № 14, у которого 81,7 см3. Следует выписать из таблицы приложения все основные размеры поперечного сечения профиля и выполнить эскиз поперечного сечения двутавровой балки.

б) Определение размеров прямоугольного поперечного сечения со сторонами *h* и *b*, при *h* = 2 *b*.

Используя полученное значение 80·10-6 м3, найдем *h*.

*h* = 0, 099 м. Примем *h* = 100 мм, тогда

*b* = 0,5 *h* = 50 мм.

Балки двутавровые (ГОСТ 8239–89)

|  |  |
| --- | --- |
|  | Обозначения:  *h –* высота балки, мм;  *b* – ширина полки, мм;  *s* – толщина стенки, мм;  *t* – средняя толщина полки, мм;  *J* – осевые моменты инерции, см4;  *W* – осевые моменты сопротивления, см 3;  *i* – радиус инерции сечения, см. |
| Рис. 33. Двутавровая балка |  |

Таблица 7

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер двутавра | Размеры, мм | | | | Площадь сечения, см2 | Геометрические характеристики сечения | | | | | |
| Jx, см4 | Wx,  см3 | ix,  см | Jy,  см4 | Wy, см3 | iy,  см |
| *h* | *b* | *s* | *t* |  |
| 10 | 100 | 55 | 4,5 | 7,2 | 12,0 | 198 | 39,7 | 4,06 | 17,9 | 6,49 | 1,22 |
| 12 | 120 | 64 | 4,8 | 7,3 | 14,7 | 350 | 58,4 | 4,88 | 27,9 | 8,72 | 1,38 |
| 14 | 140 | 73 | 4,9 | 7,5 | 17,4 | 572 | 81,7 | 5,73 | 41,9 | 11,50 | 1,55 |
| 16 | 160 | 81 | 5,0 | 7,8 | 20,2 | 873 | 109,0 | 6,57 | 58,6 | 14,50 | 1,70 |
| 18 | 180 | 90 | 5,1 | 8,1 | 23,4 | 1 290 | 143,0 | 7,42 | 82,6 | 18,40 | 1,88 |
| 18 *а* | 180 | 100 | 5,1 | 8,3 | 25,4 | 1430 | 159,0 | 7,51 | 114,0 | 22,80 | 1,12 |
| 20 | 200 | 100 | 5,2 | 8,4 | 26,8 | 1 840 | 184,0 | 8,28 | 115,0 | 23,10 | 2,07 |
| 20 *а* | 200 | 110 | 5,2 | 8,6 | 28,9 | 2030 | 203,0 | 8,37 | 155,0 | 28,2 | 2,32 |
| 22 | 220 | 110 | 5,4 | 8,7 | 30,6 | 2 550 | 232,0 | 9,13 | 157,0 | 28,60 | 2,27 |
| 22 *а* | 220 | 120 | 5,4 | 8,9 | 32,8 | 2790 | 254,0 | 9,22 | 143,0 | 34,3 | 2,50 |
| 24 | 240 | 115 | 5,6 | 9,5 | 34,8 | 3460 | 289,0 | 9,97 | 198,0 | 34,50 | 2,37 |
| 24 *а* | 240 | 125 | 5,6 | 9,8 | 37,5 | 3800 | 317,0 | 10,10 | 260,0 | 41,60 | 2,63 |
| 27 | 270 | 125 | 6,0 | 9,8 | 40,2 | 5010 | 371,0 | 11,20 | 260,0 | 41,50 | 2,54 |
| 27 *а* | 270 | 135 | 6,0 | 10,2 | 43,2 | 5500 | 407,0 | 11,30 | 337,0 | 50,00 | 2,80 |
| 30 | 300 | 135 | 6,5 | 10,2 | 46,5 | 7080 | 472,0 | 12,30 | 337,0 | 49,90 | 2,69 |
| 30 *а* | 300 | 145 | 6,5 | 10,7 | 49,9 | 7780 | 518,0 | 12,50 | 436,0 | 60,1 | 2,95 |
| 33 | 330 | 140 | 7,0 | 11,2 | 53,8 | 9 840 | 597,0 | 13,50 | 419,0 | 59,90 | 2,79 |
| 36 | 360 | 145 | 7,5 | 12,3 | 61,9 | 13 380 | 743,0 | 14,70 | 516,0 | 71,10 | 2,89 |
| 40 | 400 | 155 | 8,3 | 13,0 | 72,6 | 19 062 | 953,0 | 16,20 | 667,0 | 86,10 | 3,03 |
| 45 | 450 | 160 | 9,5 | 14,2 | 84,7 | 27 696 | 1231,0 | 18,10 | 808,0 | 101,00 | 3,09 |
| 50 | 500 | 170 | 10,0 | 15,2 | 100,0 | 39 727 | 1589,0 | 19,90 | 1043,0 | 123,00 | 3,23 |