

*Учебник: Алгебра и начала математического анализа 10-11*  
*Авторы: Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин...*

**Тема:**

# **Первообразная. Определённый интеграл.**

(п. 55 страница 294, п. 57 страница 301)

## Таблица первообразных.

функция $f(x)$	первообразная $F(x) + C$	функция $f(x)$	первообразная $F(x) + C$
<b>1</b>	$x + C$	<b>k</b>	$kx + C$
$x^p$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$(kx + b)^p$	$\frac{(kx + b)^{p+1}}{k \cdot (p+1)} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$\frac{1}{kx + b}$	$\frac{1}{k} \ln(kx + b) + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\sin(kx + b)$	$-\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\cos(kx + b)$	$\frac{1}{k} \sin(kx + b) + C$

## Определённый интеграл.

$$\int_m^n f(x) dx = F(x) \Big|_m^n = F(n) - F(m)$$

## Примеры.

1) Вычислить интеграл  $\int_1^2 x^3 dx$ . т.к.  $f(x) = x^3$ , то  $F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1}$ , тогда

$$\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} \Big|_1^2 = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\frac{3}{4}$$

2) Вычислить интеграл  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ . т.к.  $f(x) = \frac{1}{x}$ , то  $F(x) = \ln|x|$ , тогда

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln|2| - \ln|1| = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

3) Вычислить интеграл  $\int_1^2 1 dx$ . т.к.  $f(x) = 1$ , то  $F(x) = x$ , тогда

$$\int_1^2 1 dx = x \Big|_1^2 = 2 - 1 = 1$$

4) Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ . т.к.  $f(x) = \sin x$ , то  $F(x) = -\cos x$ , тогда

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

5) Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$ . т.к.  $f(x) = \cos x$ , то  $F(x) = \sin x$ , тогда

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

Следующие упражнения решить самостоятельно, пользуясь приведёнными примерами и проверяя ответ.

## Упражнения.

1) Вычислить интеграл  $\int_0^1 x^4 dx$ .

$$\frac{1}{5}$$

2) Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 x^5 dx$ .

$$0$$

3) Вычислить интеграл  $\int_{-1}^0 x^6 dx$ .

$$\frac{1}{7}$$

4) Вычислить интеграл  $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ .

$$-2$$

5) Вычислить интеграл  $\int_{-\pi}^0 \cos x dx$ .

$$0$$

## Ответы.

# Правила.

$$\int_m^n k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_m^n f(x) dx$$

*вынесение  
постоянного множителя  
за знак интеграла*

$$\int_m^n (f(x) + g(x)) dx = \int_m^n f(x) dx + \int_m^n g(x) dx$$

$$\int_m^n (f(x) - g(x)) dx = \int_m^n f(x) dx - \int_m^n g(x) dx$$

## Примеры.

1) Вычислить интеграл  $\int_{-1}^2 3x^2 dx$ . т.к.  $k = 3$ , то  $3$  можно вынести за знак интеграла

$$\int_{-1}^2 3x^2 dx = 3 \int_{-1}^2 x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_{-1}^2 = 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = 2^3 - (-1)^3 = 9$$

2) Вычислить интеграл  $\int_0^1 (3x^2 - 4x + 5) dx$ . по правилу, можно разложить на 3 интеграла

$$\int_0^1 (3x^2 - 4x + 5) dx = \int_0^1 3x^2 dx - \int_0^1 4x dx + \int_0^1 5 dx = 3 \int_0^1 x^2 dx - 4 \int_0^1 x dx + 5 \int_0^1 1 dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + 5x \Big|_0^1 = (1^3 - 0^3) - 2(1^2 - 0^2) + 5(1 - 0) = 4$$

3) Вычислить интеграл  $\int_0^1 (2x + 1)^3 dx$ . т.к.  $f(x) = (2x + 1)^3$  где  $k = 2$ ,  $b = 1$ ,  $p = 3$ ,  
то  $F(x) = \frac{(2x+1)^{3+1}}{2 \cdot (3+1)}$ , тогда

$$\int_0^1 (2x + 1)^3 dx = \frac{(2x + 1)^{3+1}}{2 \cdot (3 + 1)} \Big|_0^1 = \frac{(2x + 1)^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{(2 \cdot 1 + 1)^4}{8} - \frac{(2 \cdot 0 + 1)^4}{8} = 10$$

4) Вычислить интеграл  $\int_0^\pi \sin(2x + \pi) dx$ . т.к.  $f(x) = \sin(2x + \pi)$  где  $k = 2$ ,  $b = \pi$ ,  
то  $F(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x + \pi)$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(2x + \pi) dx &= -\frac{1}{2} \cos(2x + \pi) \Big|_0^\pi = -\frac{1}{2} (\cos(2\pi + \pi) - \cos(2 \cdot 0 + \pi)) = \\ &= -\frac{1}{2} (\cos 3\pi - \cos \pi) = 0 \end{aligned}$$

Следующие упражнения решить самостоятельно,  
пользуясь приведёнными примерами и проверяя ответ.



## Упражнения.

## Ответы.

1) Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 2x \, dx$ .

0

2) Вычислить интеграл  $\int_0^1 7x^6 \, dx$ .

1

3) Вычислить интеграл  $\int_2^3 10 \, dx$ .

10

4) Вычислить интеграл  $\int_0^1 (3x^2 + x - 1) \, dx$ .

$\frac{1}{2}$

5) Вычислить интеграл  $\int_0^{\pi} \cos(2x - \pi) \, dx$ .

0

6) Вычислить интеграл  $\int_0^1 (3x + 2)^2 \, dx$ .

13